20.02.2018 Нелинейно оптимиране (лекции)

I. Задачи на математическото оптимиране. Съществуване на решение

Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $X \subseteq \mathbb{R}^n$

(P) $\min\limits_{x \in X} f(x)$

f - целева ф-я

X - допустимо множество за (P)

x_0 се нарича решение на (P), ако $x_0 \in X$ и $f(x_0) \leq f(x)$ $\forall x \in X$

(P) се нарича минимизационна. Ако вместо min имаме max, тя се нарича максимизационна. Общо те образуват класа на екстремалните задачи.

Ако $X \equiv \mathbb{R}^n$, задачата е без ограничения

Ако $X \subseteq \mathbb{R}^n$, задачата е с ограничения

Проблеми:

(а) Има ли реш. на (P)?

(б) Намиране на характеризации на решенията

(в) Методи за намиране на решението

<u>Заб.</u> Критерий - достатъчно условие

Характеризация - НДУ

$\underbrace{ДУ \subseteq НДУ \subseteq НУ}_{\text{точки } x \in \mathbb{R}^n \text{, които удовлетворяват съответните условия}} \subseteq \mathbb{R}^n$

Съществуване на решението:

<u>Т-ма</u> (Вайерщрас) Нека $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$. Ако X е компакт, а f е непрекъсната в X, то f достига inf и sup в X.

<u>Д-во</u> Озн. $d = \inf\limits_{x\in X} f(x) \geq -\infty$.

Нека $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ е такава, че $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} d$. Всяка редица с това свойство се нарича <u>минимизираща</u>.

Тъй като $\{x_k\}$ е огр., по теоремата на Болцано-Вайерщрас $\exists$ сходяща подредица $\{x_{k_i}\} \to x_0$.

f е непрекъсната в x_0, тоест $f(x_{k_i}) \xrightarrow[i\to\infty]{} f(x_0)$.

Но $f(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} d \Rightarrow f(x_{k_i}) \xrightarrow[i\to\infty]{} d$, следователно f достига inf в $x_0 \in X \Rightarrow d \neq -\infty$.

Аналогично се доказва твърдението за sup.

<u>Тв. 1</u> Нека $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$. Ако X е затворено, а f е непрекъсната в X и $\exists$ огр. мин. редица за f в X, то f достига inf в-ху X.

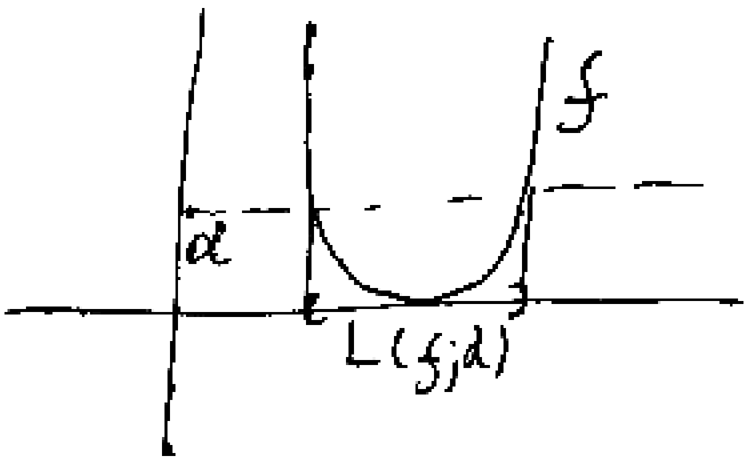
$\square$

<u>Сл. 1</u> Нека $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $X \subseteq \mathbb{R}$. Ако X е затворено, а f е непр. в-ху X и $\forall$ редица $\{x_k\} \subseteq X$ такава, че $\|x_k\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ е изпълнено $f(x_k) \to \infty$, то f достига inf в-ху X.

Доказателството следва от тв. 1 и от факта, че всяка минимизираща редица на f в-ху X в този случай е ограничена.

Опр. Нека $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Множество на Лебег за f и α се нарича

$$L(f;\alpha) = \{x \in X : f(x) \le \alpha$$



Т-ма 1 Ако $f: X \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в затв $X \subseteq \mathbb{R}^n$, то $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $L(f;\alpha)$ е затворено.

Д-во Ако $L(f;\alpha) = \emptyset$, теоремата е доказана
Нека $L(f;\alpha) \neq \emptyset$ и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L(f;\alpha)$ е такава, че $\{x_k\} \to x_0$. f е непр. $\Rightarrow f(x_0) \le \alpha$, понеже $f(x_k) \le \alpha \ \forall k$
$\Rightarrow L(f;\alpha) \ni x_0 \Rightarrow L(f;\alpha)$ е затв. □

Сл. 1 Ако $f: X \to \mathbb{R}$ е непр. в затв. X и за някое $x^* \in X$ е ограничено множеството $L(f; f(x^*))$ е ограничено, то f достига $\inf$ в-ху X.

II. Лема на Фаркаш. Следствия.

<u>Лема</u> (Фаркаш) Системата

(I) $A^T\lambda = a_0, \lambda \geq \vec{0}$

има реш. $\Leftrightarrow$ системата

(II) $Ax \leq \vec{0}, a_0^T x > 0$

няма решение.

<u>Опр</u> Неравенството $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ е <u>следствие от системата</u> $\{\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,..,m$, ако $\forall$ решение $\bar{x}$ на системата е изпълнено $\langle a_0, \bar{x}\rangle \leq 0$.

<u>Лема</u> ($\sim$ на ЛФ) Неравенството $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ е следствие от системата $\{\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,..,m \Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0, i=1,..,m$, така че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$

27.02.2018

Лема (Фаркаш) Системата

(I) $A^T\lambda = a_0, \lambda \geq \vec{0}$

има решение <=> системата

(II) $Ax \leq \vec{0}, a_0^T x > 0$

няма решение.

Лема (~ на ЛФ) Нер-вото $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ е следствие от системата $|\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,m \Leftrightarrow \exists \lambda_i \geq 0, i=1,\dots,m$, така че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$

Д-во Нека нер. вото $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ е следствие от системата $|\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,m$. Озн. с A м-цата, чиито редове са $a_1,\dots,a_m$. Системата II няма решение, следователно, от ЛФ, $\exists \lambda \in \mathbb{R}^m$ такъв, че в-рът a_0 е лин. комбинация на стълбовете на A^T (редовете на A) с коефициенти $\lambda_i, i=1,\dots,m$, т.е. $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$.

Обратно, нека $\exists \lambda_i \geq 0, i=1,\dots,m$ са такива, че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$, тоест (I) има решение $\overset{ЛФ}{\Rightarrow}$ (II) няма решение, тоест $\forall$ решение $\bar{x}$ на $Ax \leq 0$ е изпълнено $\langle a_0, \bar{x}\rangle \leq 0$, тоест нер-вото $\langle a_0, x\rangle \leq 0$ е сл. от с-мата $\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,m$ □

Сл. 1 Ако равенството $\langle a_0, x\rangle = 0$ е следствие от системата $|\langle a_i, x\rangle = 0, i=1,\dots,m$ такива, че $a_0 = \sum_{i=1}^{m} \mu_i a_i$.

Д-во Ако $\langle a_0, x\rangle = 0$ е следствие от $\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,m$ и $\langle -a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,m$, то от ~ЛФ => $\exists \lambda_i \geq 0, i=1,\dots,m$ такива, че $a_0=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i+\sum_{i=1}^{m}\lambda_{m+i}(-a_i)=\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_{m+i})a_i$.

Полагаме $\mu_i=\lambda_i-\lambda_{m+i}$ за $i=1,\dots,m$. Получаваме $a_0=\sum_{i=1}^{m}\mu_i a_i$.

Сл.2 Нека p и q са цели числа, $0\le p\le q$. Ако системата

$$\begin{cases}\langle a_i,x\rangle\le 0, & i=1,\dots,p\\ \langle a_i,x\rangle<0, & i=p+1,\dots,q\end{cases}\qquad(1)$$

има решение и нер-вото $\langle a_0,x\rangle\le 0$ е следствие от нея, то $\exists\lambda_i\ge 0$, $i=1,\dots,q$, така че $a_0=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a_i$

D-во Разглеждаме

$$\begin{cases}\langle a_i,x\rangle\le 0, & i=1,\dots,p\\ \langle a_i,x\rangle\le 0, & i=p+1,\dots,q\end{cases}\qquad(2)$$

Ще покажем, че $\langle a_0,x\rangle\le 0$ е следствие от (2). Нека $\bar{x}$ е решение на (2) и $\bar{y}$ е решение на (1). Тогава $\bar{x}+t\bar{y}$ са решения на (1), $t>0$. От усл. $\Rightarrow\langle a_0,\bar{x}+t\bar{y}\rangle\le 0$. Нека $t\downarrow 0\Rightarrow\langle a_0,\bar{x}\rangle\le 0\Rightarrow$ неравенството $\langle a_0,x\rangle\le 0$ е сл. от (2). Прилагаме ~ЛФ и получаваме, че $\exists\lambda_i\ge 0$, $i=1,\dots,q$, за които $a_0=\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a_i$. □

Сл.3 Нека p и q са цели числа, $0\le p\le q$. Ако системата

$$(4)\begin{cases}\langle a_i,x\rangle\le 0, & i=1,\dots,p\\ \langle a_i,x\rangle<0, & i=p+1,\dots,q\end{cases}$$

няма решение, тогава $\exists\lambda_i\ge 0$, $i=1,\dots,q$, така че

$\sum_{i=1}^{q}\lambda_i a_i=\vec{0}$ и $\sum_{i=p+1}^{q}\lambda_i>0$.

Д-во Означаваме с s това цяло число, за което подсистемата от първите s нер-ва в (1) има решение, а подсистемата от първите $s+1$ нер-ва няма решение. Това означава, че нер-вото $\langle a_{s+1}, x\rangle \geq 0$ е следствие от системата на първите s нер-ва.

Прилагаме сл. 2 и получаваме, че $\exists \lambda_i, i=1,\dots,s, \lambda_i \geq 0$ така че $-a_{s+1} = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i a_i$.

Полагаме $\lambda_{s+1} = 1, \lambda_i = 0, i = s+2, \dots, q$

Получаваме, че $\sum_{i=1}^{q} \lambda_i a_i = \vec{0}$. Тъй като $s \geq p$ ($\vec{0}$ е решение на $\{\langle a_i, x\rangle \leq 0, i=1,\dots,p)$, $\sum_{p+1}^{q} \lambda_i > 0$.

□

III Необходими условия за min на диференцируема ф-я в-ху многостенно множество

Разглеждаме

$$(P) \begin{cases} \min f(x) \\ \langle a_i, x\rangle \le b_i, i=1,\dots,m, \end{cases}$$

където $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$ за $i=1,\dots,m$.

<u>Опр.</u> Казваме, че f е <u>диференцируема</u> в т. $x_0 \in \mathbb{R}^n$, ако $\exists \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ - градиент - такъв, че

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} = 0 .$$

Ако f е диф. в ~~...~~ т. x_0, то $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$.

<u>Т-ма 1</u> Нека (P) има решение x_0 и нека f е диф. в x_0. Тогава $\exists \lambda_i \ge 0, i=1,\dots,m$ такива, че $\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \vec{0}$ и $\lambda_i(\langle a_i, x_0\rangle - b_i) = 0, i=1,\dots,m$.

06.03.2018

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ \langle a_i, x\rangle = b_i, i=1,\dots,m \end{cases}$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ и $b_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$

<u>Т-ма 1</u> Нека x_0 е опт. реш. на (P), нека f е диф. в т. x_0. Тогава $\exists \lambda_i \geq 0$, $i=1,\dots,m$ такива, че

$$\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \vec{0}$$

$$\lambda_i(\langle a_i, x_0\rangle - b_i) = 0, \ i=1,\dots,m$$

<u>Д-во</u> Разглеждаме множеството от активни огр.
$I(x_0) = \{i : \langle a_i, x_0\rangle = b_i\}$.

1 случай: $I(x_0) \neq \emptyset$. Разглеждаме системата

$$|\langle a_i, d\rangle \leq 0, i \in I(x_0) \qquad (1)$$

и ще покажем, че нер-вото $\langle -\nabla f(x_0), d\rangle \leq 0$ е сл. от (1)
~~Ще~~ ще използваме г Λ ф.

Нека d е реш. на (1).

Ако $i \in I(x_0)$, то $\langle a_i, d\rangle \leq 0$

Ако $i \notin I(x_0)$, то $\langle a_i, d\rangle \leq 0$

$\langle a_i, d\rangle > 0 \Rightarrow 0 < t_0 = \dfrac{b_i - \langle a_i, d\rangle}{\langle a_i, d\rangle}$

Нека $t_0 := \min\{t_i : i \in I(x_0)$ и $\langle a_i, d\rangle > 0\}$ или ∞, ако множеството, по което се взима min, е празно

$t \in (0, t_0)$

$x_0 + td \in X$, тъй като ако $i: \langle a_i, d\rangle \le 0$, то $\langle a_i, x_0 + td\rangle =$

$= \langle a_i, x_0\rangle + t\langle a_i, d\rangle$, а ако $i: \langle a_i, d\rangle > 0$, то $\langle a_i, x_0 + td\rangle =$

$= \langle a_i, x_0\rangle + t\langle a_i, d\rangle \le b_i + t_0\langle a_i, d\rangle \le b_i + t_i\langle a_i, d\rangle =$

$= \langle a_i, x_0\rangle + \dfrac{b_i - \langle a_i, x_0\rangle}{\cancel{\langle a_i, d\rangle}} \cancel{\langle a_i, d\rangle} = b_i \Rightarrow x_0$ е допустима т.

Тъй като x_0 е реш. на (P), то

$$f(x_0 + td) \ge f(x_0) \quad \forall t \in (0, t_0)$$

$$\langle \nabla f(x_0), d\rangle = \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t\|d\|} \ge 0 \sim \langle -\nabla f(x_0), d\rangle \le 0$$

$\Rightarrow \langle -\nabla f(x_0), d\rangle \le 0$ е следствие от (1).

От $\sim \Lambda \Phi \Rightarrow \exists \lambda_i \ge 0, i \in I(x_0)$ такива, че $-\nabla f(x_0) = \sum\limits_{i \in I(x_0)} \lambda_i a_i$.

Полагаме $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$ и получаваме заключението на теоремата.

2 случай: $I(x_0) = \emptyset$

$\langle a_i, x_0\rangle < b_i, i = 1, \dots, m$

За произв. $d \in \mathbb{R}^n$ и за дост. малки $t > 0$ $x_0 + td \in X$. Тъй като x_0 е реш. на (P), $f(x_0 + td) \ge f(x_0)$

$i = 1, \dots, m \quad \langle \nabla f(x_0), d\rangle = \dfrac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t\|d\|} \ge 0$

$\langle \nabla f(x_0), d\rangle \ge 0 \ \forall d \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle -\nabla f(x_0), \nabla f(x_0)\rangle \ge 0$

$-\|\nabla f(x_0)\| \ge 0 \Rightarrow \|\nabla f(x_0)\| = 0 \Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$.

Полагаме $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, m$.

Теоремата е доказана. $\square$

Зад. 2-рият случай от доказателството на т-ма 1 е теорема на Ферма

Опр. Нека $X \in \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$. Векторът $d \in \mathbb{R}^n, d \neq \vec{0}$ се нар. допустима посока за X. в т. x_0, ако

(1) $\exists t_0 : \forall t \in (0, t_0)$

(2) $x_0 + td \in X$

Сл. 1 Ако $d : \langle a_i, d \rangle \leq 0, i \in J(x_0)$ е допустима посока за X в т. $x_0 \overset{\text{т-ма } 1}{\Longrightarrow} \langle \nabla f(x_0), d \rangle \geq 0$

IV. Необходими условия за min на диф. ф-я и множество от ограничения - неравенства.

$$(PN)\begin{cases}\min f(x)\\ g_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m\end{cases}$$

$f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i=1,\dots,m$

<u>Лема 1</u> Нека $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, нека h е диф. в т. x_0 и нека $\langle \nabla h(x_0), d\rangle < 0$ за някое $d\in\mathbb{R}^n$. Тогава $\exists\, t_0>0$ такова, че $\forall\, t\in(0,t_0)$ е изпълнено $h(x_0+td)<h(x_0)$.

<u>Д-во</u> Тъй като h е диф. в x_0, то

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{h(x)-h(x_0)-\langle \nabla h(x_0), x-x_0\rangle}{\|x-x_0\|}=0$$

Нека $x=x_0+td \Rightarrow \lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{h(x_0+td)-h(x_0)-\langle\nabla h(x_0),d\rangle}{t\|d\|}=0$

$$\Rightarrow \lim_{t\downarrow 0}\frac{h(x_0+td)-h(x_0)}{t\|d\|}=\langle \nabla h(x_0),d\rangle<0.$$

$\Rightarrow$ за достатъчно малки $t>0$ е изпълнено $h(x_0+td)<h(x_0)$ $\square$

<u>Т-ма</u> (Джон) Нека x_0 е решение на (PN). Нека $f, g_i, i\in I(x_0)$ са диференцируеми в x_0, а $g_i, i\notin I(x_0)$ са непрекъснати в x_0. Тогава $\exists\, \lambda_0, \lambda_i, i\in I(x_0)\ge 0$ и не всички равни на нула такива, че $\lambda_0\nabla f(x_0)+\sum\limits_{i\in I(x_0)}\lambda_i\nabla g(x_i)=\vec{0}$.

__Д-во__ Разгл. $X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \le 0, i=1,\dots,m\}$.
Ще покажем, че системата

$$\begin{cases} \langle \nabla g_i(x_0), d \rangle < 0, & i \in I(x_0) \\ \langle \nabla f(x_0), d \rangle < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

няма решение и ще приложим сл. 3 от ЛФ.

Допускаме, че (1) има решение и нека $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ е решение. За достатъчно малки $t > 0$, $x_0 + t\bar{d} \in X$, тъй като или $i \in I(x_0)$ от $\langle \nabla g_i(x_0), \bar{d} \rangle < 0$ от лема 1. и, следователно, за достатъчно малки $t > 0$ $g(x_0 + t\bar{d}) < g(x_0) = 0$, или $i \notin I(x_0)$ и $g_i(x_0) < 0$ и, понеже g_i е непр. в x_0 за дост. малки $t > 0$, $g_i(x_0 + t\bar{d}) < 0$ за $i = 1, \dots, m$. Тогава $g_i(x_0 + t\bar{d}) < 0$ за достатъчно малки $t > 0$, които $x_0 + t\bar{d}$ са допустими.

От $\langle \nabla f(x_0), \bar{d} \rangle < 0$ и лема 1 $\Rightarrow$ $f(x_0 + t\bar{d}) < f(x_0)$ за достатъчно малки $t > 0$ $\Rightarrow$ системата (1) няма решение.

Прилагаме сл. 3 на ЛФ и получаваме, че $\exists \lambda_0 \ge 0$ и $\lambda_i \ge 0$, $i \in I(x_0)$, не всичките равни на нула, и такива, че $\lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = \vec{0}$ и $\lambda_0 + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i > 0$.

□

__Сл. 1__ Нека x_0 е решение на (PN) и нека f и $g_i, i = 1, \dots, m$ са диф. в x_0. Тогава $\exists \lambda_0, \lambda_i \ge 0$, не всички $= 0$, за които

(а) $\lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = \vec{0}$

(б) $\lambda_i g_i(x_0) = 0, i = 1, \dots, m$ – условие за допълнителност

__Д-во__ От теоремата на Джон $\Rightarrow$ $\exists \lambda_0, \lambda_i \ge 0$ ($i \in I(x_0)$) и не всички равни на нула, за които

$\lambda_0 \nabla f(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = \vec{0}$

Полагаме $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$. Тогава са изпълнени условията (а) и (б) от твърдението на теоремата.

□

Сл. 2 Нека x_0 е реш. на (PN). Нека $f, g_i, i=1,\dots,m$ са диф. в x_0. Ако системата

$$\left| \langle \nabla g_i(x_0), d \rangle < 0, i \in I(x_0) \right.$$

има решение. (например когато $\nabla g_i(x_0)$ са лин. независими), съществуват $\lambda_i \geq 0, i=1,\dots,m$ такива, че

(а) $\nabla f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) = \vec{0}$

(б) $\lambda_i \nabla g_i(x_0) = 0, i=1,\dots,m$

Д-во От доказателството на теоремата на Джон

$$\left| \begin{array}{l} \langle \nabla g_i(x_0), d \rangle < 0, i \in I(x_0) \\ \langle \nabla f(x_0), d \rangle < 0 \end{array} \right.$$

няма решение. Но системата $| \langle \nabla g_i(x_0), d \rangle < 0, i \in I(x_0)$ има решение и неравенството $\langle \nabla f(x_0), d \rangle \geq 0$ е следствие от нея.

$\langle -\nabla f(x_0), d \rangle \leq 0$. От сл. 2 на ЛФ $\Rightarrow \exists \lambda_i \geq 0, i \in I(x_0)$

Такива, че $-\nabla f(x_0) = \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i \nabla g_i(x_0)$, което е (а).

Полагаме $\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$ и получаваме и (б). □

13.03.2018 V. Необходими условия за min на диференцируеми функция в множество с ограничения - равенства

Нека $f, h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k=1,\dots,s$

Разгл.

$$(PR) \begin{cases} \min f(x) \\ h_k(x)=0, \ k=1,\dots,s \end{cases}$$

Допустимо множество: $X := \{x \in \mathbb{R}^n : h_k(x)=0, k=1,\dots,s\}$

<u>Т-ма</u> (Лагранж) Нека $\bar{x}$ е реш. на (PR) и нека f е диф. в $\bar{x}$, а h_k са с непр. частни производни в околност на $\bar{x}$, $k=1,\dots,s$.

Тогава $\exists \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$, не всички $=0$, и

$$\mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k \nabla h_k(x_0) = 0 \qquad (1)$$

<u>Д-во</u> Закл. е ясно, ако $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ [Тогава $\mu_0 = 1$, $\mu_k = 0$, $k=1,\dots,s$ и получаване (1)] и ако векторите $\nabla h_k(\bar{x})$ са линейно зависими (Тогава коеф. в лин. зав. $\mu_1, \dots, \mu_k$, не всички $=0$, и полагаме $\mu_0 = 0$).

Ако $\nabla h_k(\bar{x})$ са линейно независими, $k=1,\dots,s$, ще док., че системата $\langle \nabla f(\bar{x}), d\rangle = 0$ е следствие от системата

$| \langle \nabla h_k(\bar{x}), d\rangle = 0, k=1,\dots,s$ и ще прил. сл. 1 от ЛФ.

Нека $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$ е решение на системата

$| \langle \nabla h_k(\bar{x}), d\rangle = 0, k=1,\dots,s$. За $i \in \{1,\dots,s\}$ разгл.

$$\begin{cases} \langle \nabla h_k(\bar{x}), d\rangle = 1, \text{ ако } k=i \\ \langle \nabla h_k(\bar{x}), d\rangle = 0, \text{ ако } k \neq i \end{cases}$$

От лин. незав. на $\nabla h_K(\bar{x})$ => системите имат решения. Озн. решенията им с $d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}^n$. (2)

Разгл. $s+1$ реални пром. $\varepsilon, t_1, \dots, t_s$ и ф-ите на тях $h_K(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i d_i)$. Разгл. системата $| h_K(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i d_i) = 0, K=1,\dots,s$

Якобианът $\frac{\partial h_K}{\partial t_i}(\varepsilon = t_1 = \dots = t_s = 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = E$ има $\det = 1 \neq 0$

От теоремата за неявната функция => $\exists$ инт. $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и s на брой непр. диф. в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ф-ции $t_1(\varepsilon), \dots, t_s(\varepsilon)$ такива, че $t_i(0) = 0, i = 1, \dots, s$ и $| h_K(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i d_i) = 0, \; K=1,\dots,s, \; \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ (3)

Диф. по ε:

$$\langle \nabla h_K(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i), \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(\varepsilon) d_i \rangle = 0, \quad K=1,\dots,s, \; \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$$

За $\varepsilon = 0$ имаме $\langle \nabla h_K(\bar{x}), \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i'(0) d_i \rangle = 0, K=1,\dots,s$

тъй като $\bar{d}$ е решение на $\langle \nabla h_K(\bar{x}), d \rangle = 0, K=1,\dots,s$ и от (2) => $t_K'(0) = 0, K=1,\dots,s$.

Разглеждаме $f_1(\varepsilon) := f(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i$ в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

От (3) => $\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i \in X$ за $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ и тъй като $\bar{x}$ е решение на $\min_{x \in X} f(x)$, имаме

$f(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i) \geq f(\bar{x})$ за $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, тоест f_1 има min в $0 \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, т.е.

$$f_1(\varepsilon) \geq f_1(0) \ \forall \ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \text{ и } f_1'(0) = 0.$$

За $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ $f_1'(\varepsilon) = \langle \nabla f(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i), \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i \rangle$.

За $\varepsilon = 0$

$0 = f_1'(0) = \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{d} \rangle$, тоест $\langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle$ е следствие от

$\{ \langle \nabla h_k(\bar{x}), d \rangle = 0, \ k = 1, \dots, s$

Прилагаме 1 ч. от ЛФ $\Rightarrow \exists \ \mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ такива, че

$$\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \nabla h_i(\bar{x})$$

Полагаме $\mu_0 = -1$ и получаваме закл. на теоремата

$\square$

VI. Необходими условия за min на диф. ф-я в мн-во с ограничения равенства и неравенства

Нека $f, g_i, i=1,\dots,m, h_k, k=1,\dots,s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Разгл.

$$(PRN)\ \begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \le 0, i=1,\dots,m \\ h_k(x) = 0, k=1,\dots,s \end{cases}$$

Доп. мн-во $X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \le 0, i=1,\dots,m, h_k(x)=0, k=1,\dots,s\}$

<u>Т-ма 1</u> Нека $\bar{x}$ е решение на (PRN). Нека f и $g_i, i=1,\dots,m$ са диф. в $\bar{x}$, а $h_k, k=1,\dots,s$ имат непр. частни производни в ок. на $\bar{x}$.

Тогава $\exists$ неотр. числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ и $\mu_1, \dots, \mu_s$ - произволни, така че

(а) $\lambda_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{s} \mu_j \nabla h_j(\bar{x}) = \vec{0}$

(б) $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i=1,\dots,m$ (УД)

(в) не всички $\mu_1, \dots, \mu_s$ и $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ са $=0$

<u>Д-во</u>

Заключението е в сила при $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ и когато $\nabla h_i(\bar{x})_{i=1,\dots,s}$ са лин. зависими.

Системата
$$\begin{cases} \langle \nabla h_k(\bar{x}), d \rangle = 0, k=1,\dots,s \\ \langle \nabla g_i(\bar{x}), d \rangle < 0, i \in I(\bar{x}) \\ \langle \nabla f(\bar{x}), d \rangle < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

няма решение. Допускаме противното, т.е. нека $\bar{d}$ е решение на (1).

От д-вото на Теоремата на Лагранж $\Rightarrow \exists\, d_1, \dots, d_s \in \mathbb{R}^n$, $\exists$ непр. диф. в $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ф-ции $t_i(\varepsilon)$ за $i=1,\dots,s$, така че $t_i(0) = t_i'(0) = 0$ за $i=1,\dots,s$ и такива, че е в сила

$$h_k\left(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i\right) = 0, \quad k=1,\dots,s,\ \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \qquad (2)$$

Разгл. векторите

$$z_\varepsilon := \sum_{i=1}^{s} \frac{t_i(\varepsilon)}{\varepsilon} d_i, \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),\ \varepsilon \neq 0$$

$$z_0 := \sum_{i=1}^{s} t_i'(0) d_i = \vec{0}$$

$$z_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{} \vec{0}$$

$$\|z_\varepsilon - \vec{0}\| = \left\| \sum_{i=1}^{s} \frac{t_i(\varepsilon)}{\varepsilon} d_i - \sum_{i=1}^{s} t_i'(0) d_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{s} \left(\frac{t_i(\varepsilon)}{\varepsilon} - t_i'(0) \right) d_i \right\| \leq$$

$$\leq \underbrace{\left| \sum_{i=1} \left(\frac{t_i(\varepsilon)}{\varepsilon} - t_i'(0) \right) \right|}_{\varepsilon \to 0} \|d_i\|$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i\right) - f(\bar{x}) - \left\langle \nabla f(\bar{x}), \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i \right\rangle}{\left\| \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i \right\|}$$

$$x_\varepsilon := \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i = \varepsilon \left(\bar{d} + \sum_{i=1}^{s} \frac{t_i(\varepsilon)}{\varepsilon} d_i \right) = \varepsilon (\bar{d} + z_\varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i\right) - f(\bar{x})}{\varepsilon \|\bar{d} + z_\varepsilon\|} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon \langle \nabla f(\bar{x}), \bar{d} + z_\varepsilon \rangle}{\varepsilon \|\bar{d} + z_\varepsilon\|} =$$

$$= \frac{\langle \nabla f(\bar{x}), \bar{d} \rangle}{\|\bar{d}\|}$$, което е < 0, тъй като $\bar{d}$ е решение на (1).

$\Rightarrow$ за достатъчно малки $\varepsilon > 0$

$$f(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i) < f(\bar{x}) \qquad (3)$$

По същия начин, за дост. малки $\varepsilon > 0$

$$g_i(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i) < g_i(\bar{x}) = 0 \text{ за } i \in I(x_0) \qquad (4)$$

От непр. на g_i за $i \notin I(x_0)$ имаме за дост. малки $\varepsilon > 0$

$$g_i(\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i) < 0 \text{ за } i \notin I(x_0) \qquad (5)$$

От (2), (4) и (5) $\Rightarrow$ за дост. малки $\varepsilon > 0$

$$\bar{x} + \varepsilon \bar{d} + \sum_{i=1}^{s} t_i(\varepsilon) d_i \in X$$

Но от (3) $\Rightarrow$ в допустимите точки f има $<$ стойност от системата ѝ в реш. на $\min_{x \in X} f(x)$.

$\Rightarrow$ допускането, че (1) има решение, е невярно и системата (1) няма решение. От сл. 7 на ЛФ $\Rightarrow$

$\exists\ \mu_k', \mu_k''\ k = 1, \dots, s,\ \lambda_0 \geq 0$ и $\lambda_i \geq 0,\ i \in I(\bar{x})$ такива, че

$$\sum_{k=1}^{s} \mu_k' \nabla h_k(\bar{x}) - \sum_{k=1}^{s} \mu_k'' \nabla h_k(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \nabla g_i(\bar{x}) + \lambda_0 \nabla f(x) = \vec{0} \text{ и}$$

$$\sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i + \lambda_0 > 0.$$

Полагаме $\mu_k = \mu_k' - \mu_k'' \in \mathbb{R},\ k = 1, \dots, s$

$\lambda_i = 0$ за $i \notin I(x_0)$

Имаме $\sum_{k=1}^{s} \mu_k \nabla h_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i' \nabla g_i(\bar{x}) + \lambda_0 \nabla f(\bar{x}) = 0 \qquad (a)$

$\lambda_i g_i(x) = 0, \ i = \overline{1, m}$ (б)

(в) е очевидно

$\square$

20.03.2018

VII. Достатъчно условия за оптималност. Следствия от ф-ята на Лагранж

(GP) $\min f(x)$

$$\begin{cases} g_i(x) \le 0, \ i=1,\dots,n \\ h_k(x) = 0, \ k=1,\dots,s \\ x \in X \end{cases} \qquad X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad f, g_i, h_k : X \to \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^m_+ = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_m), \lambda_i \ge 0\}$$

<u>Опр.</u> <u>Функция на Лагранж</u> за (GP) е

$$L(x, v) := f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(x), \qquad (1)$$

където $v = (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$

<u>Опр.</u> Нека $M = \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^s$, тогава $L : X \times M \to \mathbb{R}$

Точката $(\bar{x}, \bar{v}) \in X \times M$ е <u>седлова точка</u> на L, ако

$$L(\bar{x}, v) \le L(\bar{x}, \bar{v}) \le L(x, \bar{v}) \qquad (2)$$

<u>Т-ма</u> (Дост. условие) Нека $\bar{x} \in X$. Ако $\exists\, \bar{v} \in M$, за която $(\bar{x}, \bar{v})$ е седлова за L, зададена с (1), то $\bar{x}$ е решение на (GP)

<u>Д-во</u> Нека $(\bar{x}, \bar{v})$ е седлова точка за L. От $L(\bar{x}, v) \le L(\bar{x}, \bar{v})\ \forall v \in M$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\bar{x}) + \sum_{k=1}^{s} \mu_k h_k(\bar{x}) \le f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{s} \bar{\mu}_k h_k(\bar{x}) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(x) + \sum_{k=1}^{s} (\mu_k - \bar{\mu}_k) h_k(\bar{x}) \le 0, \quad \forall \lambda_i \ge 0, \ \forall \mu_k$$

Нека $\lambda_i = \bar{\lambda}_i \ \forall i$ и $\mu_k = \bar{\mu}_k \ \forall k \neq k_0$. Тогава $(\mu_{k_0} - \bar{\mu}_{k_0}) h_{k_0}(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \mu_{k_0} \in \mathbb{R}$

$\mu_k = \bar{\mu}_k \ \forall k$ и $\lambda_i = \bar{\lambda}_i, \forall i \neq i_0 \Rightarrow (\lambda_{i_0} - \bar{\lambda}_{i_0}) g_{i_0}(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda_{i_0} \geq 0$

При $\lambda_{i_0} = \bar{\lambda}_{i_0} + 1 \Rightarrow g_{i_0}(\bar{x}) \leq 0$

От (3) $\Rightarrow$ $\bar{x}$ изпълнява всички ограничения (доп. точка),

Ако $\bar{x}$ е допустима точка, то $h_k(\bar{x}) = 0$ и $g_i(x) \leq 0$.

<u>Лема (Условие за допълнителност)</u> $\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \forall i = 0, \dots, m.$

<u>Д-во</u> $(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) g_i(\bar{x}) \leq 0 \quad \forall \lambda_i \geq 0.$

- ако $g_i(\bar{x}) = 0$, лемата е тривиална
- ако $g_i(\bar{x}) < 0$, то от $\lambda_i - \bar{\lambda}_i \geq 0 \ \forall \bar{\lambda}_i \geq 0 \Rightarrow \bar{\lambda}_i = 0$

$\square$

продължение на предното доказателство

(3) $\Leftrightarrow f(\bar{x}) \leq f(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i g_i(x)}_{\leq 0} \leq f(x)$, тоест $\bar{x}$ е решение на (GP)

$\square$

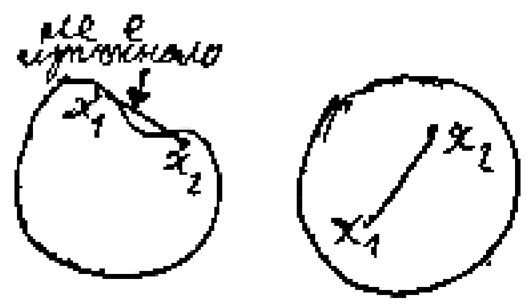
VIII. Изпъкнали множества. Свойства.

Опр. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало, ако $\forall x_1, x_2 \in X \Rightarrow$

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X,\ \lambda \in [0, 1]$

↑

отсечката между x_1 и x_2: $[x_1, x_2]$



Заб. $\emptyset, \mathbb{R}^n$ са изпъкнали

Пр.1 Хиперравнина $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = b\}$ - изпъкнало

Полуравнина $\overline{H}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leq b\}$ - изпъкнало
(затворена)

Пр.2 Кълба $B[x_0, \alpha] := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \alpha\}$ - затв.

$B(x_0, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \alpha\}$ - отв.

Тв.1 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и $\beta \in \mathbb{R}$, то $\beta X = \{\beta X : x \in X\}$ е изпъкнало

Д-во $y_1, y_2 \in \beta X$, то $y_i = \beta x_i,\ x_i \in X$

$$\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 = \beta(\underbrace{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}_{\in X}) \in \beta X$$

$\square$

Тв.2 Ако X и Y са изпъкнали, то $X \pm Y$ също са изпъкнали

Д-во $z_1, z_2 \in X + Y \Rightarrow z_1 = x_1 + y_1,\ x_i \in X$

$z_2 = x_2 + y_2,\ y_i \in Y$

$$\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 = \lambda(x_1 + y_1) + (1-\lambda)(x_2 + y_2) =$$

$$= \underbrace{[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_1]}_{\in X} + \underbrace{[\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]}_{\in Y} \in X + Y$$

$X - Y = X + (-1)Y$ $\square$

Зад. 1 за дом.

$\square + O = ?$

Опр. $\overline{X} := \inf\{Y : Y \supseteq X$ и Y - затв$\}$

Тв. 3 Ако $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп., то $\overline{X}$ е изп.

Д-во Нека $u, v \in \overline{X}$. По опр. $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ и

$$\begin{cases} \lim x_k = u \\ \lim y_k = v \end{cases}$$

$\forall \lambda \in [0,1) \Rightarrow \lambda x_k + (1-\lambda) y_k \in X$ (изп.)

Но $\lim\limits_{k \to \infty} (\lambda x_k + (1-\lambda) y_k) = \lambda u + (1-\lambda) v \in \overline{X}$

$\square$

Тв. 4 Ако $X_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ са изп $\overset{\forall \gamma \in \Gamma}{\Rightarrow} \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ е изп.

Д-во $x_1, x_2 \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \Leftrightarrow x_1, x_2 \in X_\gamma \; \forall \gamma \in \Gamma$

X_γ е изп. $\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X_\gamma \; \forall \gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \bigcap\limits_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$

$\square$

Опр. __Изпъкнала комбинация__ на $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ е $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, където $\lambda_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$

Опр. $co(x_1, \dots, x_k) := \{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i = 1\}$ се нарича __изпъкнала обвивка__ на $x_1, \dots, x_k$

Т-ма 1 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало $\Leftrightarrow$ X съдържа всички изпъкнали комбинации на точки от него.

Д-во

($\Leftarrow$) е ясно, т.к. по деф. на изпъкналост е да съдържа $\forall$ изп.

комбинации на 2 точки

$\Rightarrow$) Индукция по броя точки в изп. комб. k.

При $k=2$ е вярно по деф.

Нека X съдържа всички лин. комб на $k>2$ точки

Нека $x_1, \dots, x_{k+1} \in X$ са . Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ са произволни; $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$

$$x := \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i$$

Ако някое $\lambda_{i_0} = 0$, т. е лин. комб на k точки.

Нека $\lambda_i > 0 \ \forall i$

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1} = (1-\lambda_{k+1}) \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i \right] + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

Нека $y = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} x_i$. За $\mu_i = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}$ е изпълнено $\mu_i > 0$, т.е. $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$, понеже $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}}$, но $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \lambda_{k+1} = 1$.

$$y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i \in X,$$

т.е. $x = (1-\lambda_{k+1}) y + \lambda_{k+1} x_{k+1}$, където y и $x_{k+1} \in X \Rightarrow x \in X$ $\square$

27.03.2018 IX. Отделимост на изпъкнали множества

Опр. Казваме, че $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ са <u>отделими</u>, ако $\exists$ хиперравнина H в $\mathbb{R}^n$ такава, че X лежи изцяло в едното затв. полупространство, определено от H, а Y лежи изцяло в другото затв. полупространство

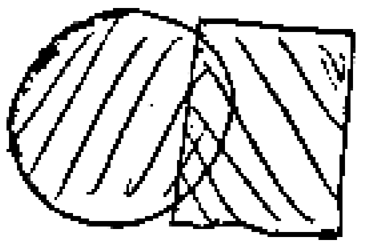
$$(\iff \exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq \vec{0} \text{ и } b \in \mathbb{R}: \underbrace{\langle a,x\rangle}_{\forall x \in X} \le b \le \underbrace{\langle a,y\rangle}_{\forall y \in Y}$$

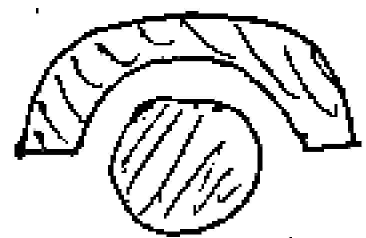
$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = b\} \text{ отделя } X \text{ и } Y)$$

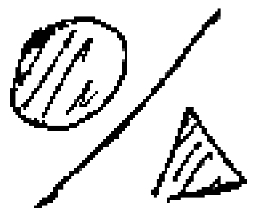
Опр. Казваме, че множествата X и $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ са <u>силно отделими</u>, ако $\exists$ хиперравнина H в $\mathbb{R}^n$ такава, че X лежи изцяло в едното отворено полупространство, определяно от H, а Y лежи изцяло в другото полупространство.

$$(\iff \exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq \vec{0} \text{ и } b \in \mathbb{R} : \underline{\langle a,x\rangle < b < \langle a,y\rangle} \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a,x\rangle = b\} \text{ силно отделя } X \text{ и } Y)$$


неотделими

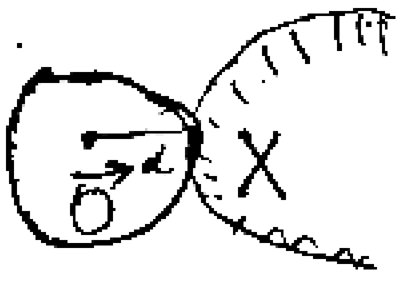

неотделими


силно отделими


~~силно~~ отделими, но не силно

<u>Лема</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е затворено и изпъкнало (и непразно). Нека $\vec{0} \notin X$. Тогава $\vec{0}$ и X са силно отделими.

<u>Д-во</u> Вземаме $d > 0$: $\underbrace{B[\vec{0}, d] \cap X}_{K} \neq \vec{0}$.



K е затворено (сечение на затв. X и $B[\vec{0}, d]$) и ограничено (съдържа се в $B[\vec{0}, d]$) $\Rightarrow$ K е компактно

Разгл. $f(x)=\|x\|$ - непр. От т-мата на Вайерщрас $\exists x_0\in K$:

$$\|x\|\geq\|x_0\| \quad \forall x\in K$$

$$\|x\|\geq\|x_0\| \quad \forall x\in X \quad (\text{ако } x\in X\setminus K, \text{ то } \|x\|>d \geq \|x_0\|$$

Взимаме пр. точка $x\in X$ и образуваме

$$\lambda x+(1-\lambda)x_0\in X \quad (\forall\lambda\in[0,1] \text{ т.к. } X \text{ е изп.})$$

$$\|\lambda x+(1-\lambda)x_0\|^2\geq\|x_0\|^2 \quad \forall\lambda\in[0,1]$$

$$\langle \lambda x+(1-\lambda)x_0, \lambda x+(1-\lambda)x_0\rangle\geq\langle x_0,x_0\rangle \quad \forall\lambda\in[0,1]$$

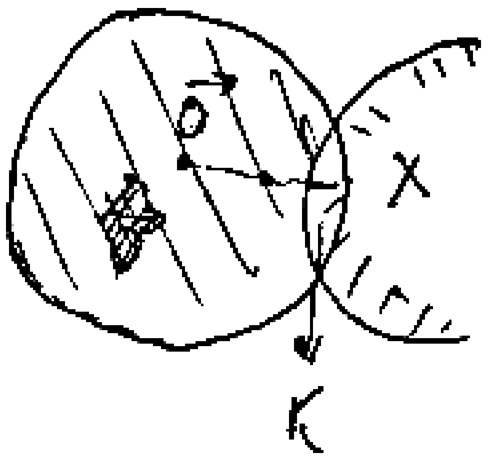
$$\langle x_0+\lambda(x-x_0), x_0+\lambda(x-x_0)\rangle\geq\langle x_0,x_0\rangle \quad \forall\lambda\in[0,1]$$

$$\cancel{\langle x_0,x_0\rangle}+2\lambda\langle x_0,x-x_0\rangle+\lambda^2\langle x-x_0,x-x_0\rangle\geq\cancel{\langle x_0,x_0\rangle} \quad \forall\lambda\in[0,1]$$

Делим на $\lambda>0$:

$$2\langle x_0,x-x_0\rangle+\lambda\langle x-x_0,x-x_0\rangle\geq 0 \quad \forall\lambda\in(0,1]$$

Пускаме $\lambda\to 0$:



$$2\langle x_0,x-x_0\rangle\geq 0 \quad \forall x\in X$$

$$\langle x_0,x\rangle\geq\underbrace{\langle x_0,x_0\rangle}_{\|x_0\|^2>0} \quad \forall x\in X$$

Полагаме $b:=\frac{\|x_0\|^2}{2}, a=x_0$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\langle x_0,x\rangle & \geq & \|x_0\|^2 & > & \frac{\|x_0\|^2}{2} = b & > & 0 & = & \langle x_0,\vec{0}\rangle \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\
\langle a,x\rangle & & > & & b & > & & & \langle a,\vec{0}\rangle
\end{array}$$

$\Rightarrow$ X и $\vec{0}$ са силно отделими, като за отделяща ги хиперравнина взимаме $H:=\{x\in\mathbb{R}^n : \langle x_0,x\rangle=\frac{\|x_0\|^2}{2}\}$

Тв. Нека X, Y са ~~[illegible]~~ затворени. Ако едно от двете е ограничено, то $X+Y$ и $X-Y$ ще бъдат затворени.

Д-во Ще докажем тв. само за $X-Y$, $X+Y$ е аналог.

Взимаме $z_k \in X-Y : z_k \to z_0$.

Точките $z_k \in X-Y$ са от вида $x_k - y_k$, където $x_k \in X$ и $y_k \in Y$.

Нека X е ограничено $\Rightarrow$ X е компактно $\Rightarrow$
~~[illegible]~~
от тв. X е огр. или Y е огр.

$\Rightarrow$ Можем да изберем сходяща $\{x_{k_i}\}_i \subseteq X$, $x_{k_i} \xrightarrow[i]{} x_0 \in \underset{\text{затв.}}{X}$.

$$\begin{array}{ccc} z_{k_i} = & x_{k_i} & - y_{k_i} \\ \downarrow i & \downarrow i & \\ z_0 & x_0 & \end{array}$$

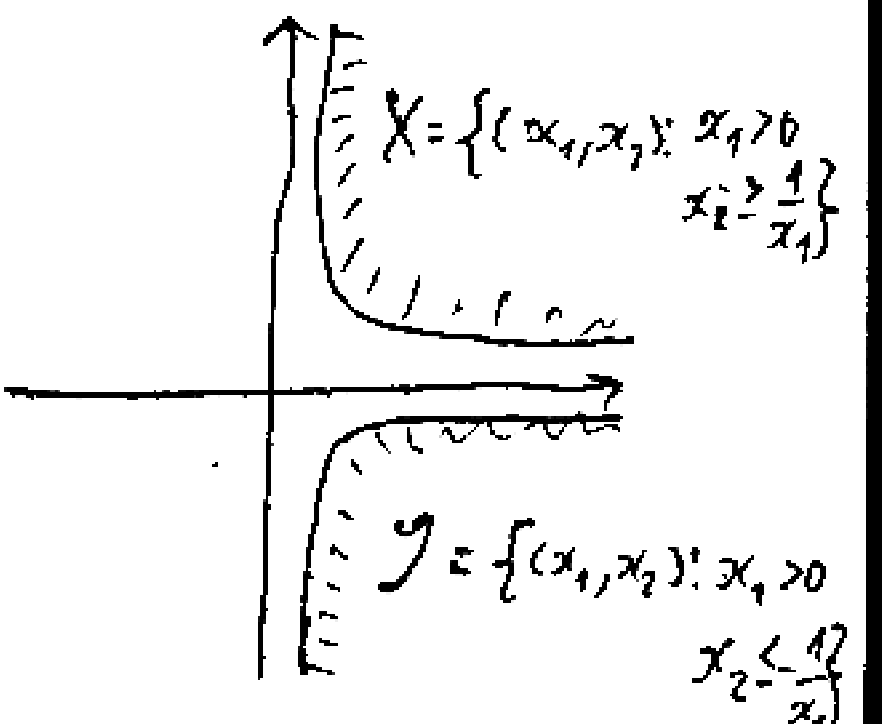
затв. $Y \ni y_{k_i} = \overset{x_{k_i} - z_{k_i}}{\cancel{[illegible]}} \xrightarrow[i]{} x_0 - z_0$

$x_0 - z_0 = y_0$, където $x_0 \in X$, $y_0 \in Y \Rightarrow z_0 = x_0 - y_0 \in X - Y$. $\square$

Пр. 1

X и Y от чертежа са ~~[illegible]~~. неогр. изп. и затв., но

$X+Y$ не е затворено



$x_n = (\frac{1}{n}, n)$

$y_n = (\frac{1}{n}, -n)$

$x_n + y_n = (\frac{2}{n}, 0) \to \vec{0} \notin X+Y$

<u>Т-ма</u> (за силна отделимост) Нека $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ са затв., изп. и непр. се мн-ва, едно от които е огр. Тогава X и Y са силно отделими.

<u>Д-во</u>

$Z := X - Y$ е изп. затв. и $\vec{0} \notin Z$.

Прилагаме лемата за Z и $\vec{0} \Rightarrow \exists z_0 \neq \vec{0}$:

$H := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z_0, z \rangle = b\}$

$b = \frac{\|z_0\|^2}{2}$ $(b > 0)$ силно отделя Z и $\vec{0}$, т.е.

$\langle z_0, z \rangle > b > \langle z_0, \vec{0} \rangle \ \forall z \in Z$

$\langle z_0, x - y \rangle > b > 0 \ \forall x \in X$ и $\forall y \in Y$

$\langle z_0, x \rangle > b + \langle z_0, y \rangle \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$

$\inf_{x \in X} \langle z_0, x \rangle \geq \underset{>0}{b} + \sup_{y \in Y} \langle z_0, y \rangle > \sup_{y \in Y} \langle z_0, y \rangle$

$\exists \beta : \inf_{x \in X} \langle z_0, x \rangle > \beta > \sup_{y \in Y} \langle z_0, y \rangle$

Тогава $H := \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z_0, z \rangle = \beta\}$ силно отделя X и Y $\square$

$X \subseteq \mathbb{R}^n$

$\overline{X}$ - затваряне на X, състои се от всички граници на редици от X.

Ако $\bar{x} \in \overline{X}$, то $\forall \varepsilon > 0 \quad B(\bar{x}, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$

Имаме две възможности:

* $\exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq X$

$\bar{x}$ се нарича ~~вътрешност~~ вътрешна точка на X. Мн-вото от вътрешни точки се нарича <u>вътрешност</u> и се бележи с $\operatorname{int} X$

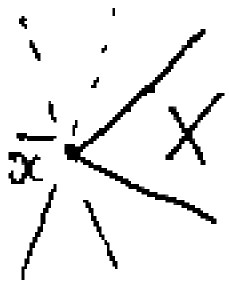
* $\forall \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, но $B(\bar{x}, \varepsilon) \not\subseteq X$.

Такива точки се наричат <u>контурни</u>, а мн-вото от контурни точки се нарича <u>контур</u> и се бележи с ∂X

$$\overline{X} = \underbrace{\operatorname{int} X}_{\text{отв.}} \cup \underbrace{\partial X}_{\text{затв.}}$$

<u>Опр.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\bar{x} \in X$. Казваме, че х-та $H := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\}$ е <u>опорна</u> за X в т. $\bar{x}$, ако $\langle a, x \rangle \geq \langle a, \bar{x} \rangle \ \forall x \in X$, тоест X лежи изцяло в едно полупространство, определено от H и се допира до нея в т. $\bar{x}$.

<u>Тв.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало. Тогава $\forall x \in \partial X$ можем да намерим опорна за X в т. $\bar{x}$ хиперравнина.



<u>Д-во</u> $x \in \partial X$. $(\partial X \equiv \partial \overline{X})$ → за дом.

$\Rightarrow x \in \partial \overline{X} \Rightarrow \exists \{x_k\} \notin \overline{X} : x_k \xrightarrow[k]{} x$.

За изп. затв. $\overline{X}$ и $\forall \{x_k\}$ прилагаме т-мата за силна отделимост

$\Rightarrow \exists a_k \in \mathbb{R}^n, a_k \neq \vec{0} : \langle a_k, x \rangle > \langle a_k, x_k \rangle \ \forall x \in \overline{X}$ (*)

$\left\{\frac{a_k}{\|a_k\|}\right\} \longrightarrow a \in S, \|a\|=1$

Фиксираме $x \in \overline{X}$ и правим гр. преход в (*)

$$\langle a, x\rangle \geq \langle a, \bar{x}\rangle \ \forall x \in \overline{X}$$

$\Rightarrow M := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = \langle a, \bar{x}\rangle\}$ е опорна за X в $\bar{x}$.

□

<u>Сл. 1</u> Нека X е изп. мн-во и $y \notin X \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n, a \neq \vec{0}$:

$\langle a, x\rangle \geq \langle a, y\rangle \ \forall x \in X$

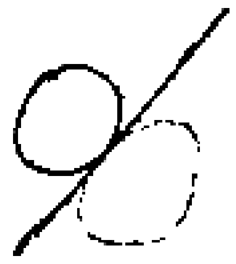
<u>Д-во</u> Ако $y \notin \overline{X}$, ще приложим силната т-ма за отделимост.

За $y \in \partial X$ прилагаме твърдението.

□

<u>Т-ма</u> (слаба теорема за отделимост) Нека $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ са изп. и непр. м., тогава те са отделими.

<u>Д-во</u> Разгл. $X - Y$ - изпъкнало и $\vec{0} \notin X - Y$.



От сл. 1 $\Rightarrow \exists a \neq \vec{0} : \langle a, z\rangle \geq \langle a, \vec{0}\rangle \ \forall z \in Z = X - Y$

$$\langle a, x - y\rangle \geq 0 \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$$\langle a, x\rangle \geq \langle a, y\rangle \ \forall x \in X \ \forall y \in Y$$

$\inf\limits_{x \in X} \langle a, x\rangle \geq \sup\limits_{y \in Y} \langle a, y\rangle$, т.е. $\exists \beta : \inf\limits_{x \in X} \langle a, x\rangle \geq \beta \geq \sup\limits_{y \in Y} \langle a, y\rangle$

$\Rightarrow M := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle = \beta\}$ отделя X и Y

□

03.04.2018

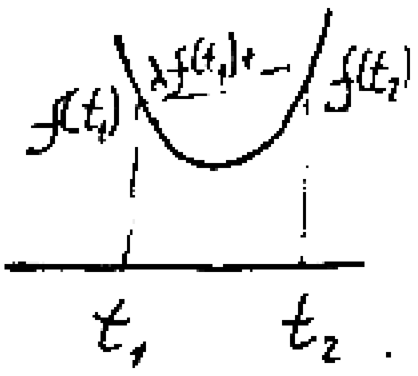
8. Изпъкнали функции.

Основни св-ва. Непрекъснатост и диференцируемост по посока на изпъкнала функция.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

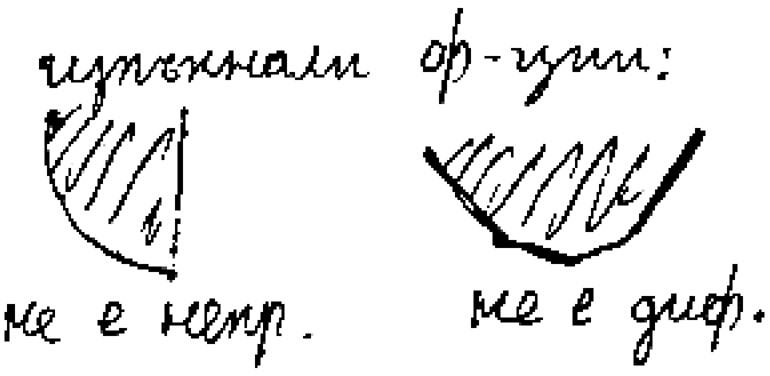
<u>Опр.</u> Ако T е интервал в $\mathbb{R}$ и $\varphi : T \to \mathbb{R}$. Казваме, че φ е <u>изпъкнала</u> в T, ако $\forall\, t_1, t_2 \in T$

$$f(\lambda t_1 + (1-\lambda) t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$



Ако φ е диференцируема в отв. инт. T, то φ е изпъкнала в T, ако $\varphi'(t)$ е растяща в T.

Ако е е двукратно диференцируема в отв. инт. T, φ е изп. в $T \Leftrightarrow \varphi''(t) \geq 0 \;\forall t \in T$



<u>Опр.</u> Нека X е изпъкнало множество в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ наричаме изпъкнала в X, ако $\forall\, x_1, x_2 \in X$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

Пр. 1 $f(x) = \langle c, x\rangle$ за някое $c \in \mathbb{R}^n, c \neq \vec{0}$

Пр. 2 $f(x) = \|x\|$

Пр. 3 $f(x) = \|x\|^2$

Опр. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Множеството X се нарича **дефиниционно множество** на f, а множеството

$$epi f := \{(x, r) \in \mathbb{R}^{\boxed{n+1}} : x \in X, r \geq f(x)\}$$

се нарича **надграфика** на f

Тв. Нека X е изп. мн. в $\mathbb{R}^n$. $f: X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в $X \Leftrightarrow$ $epi f$ е изпъкнало множество в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Д-во Нека f е изпъкнала в X. Взимаме $(x_1, r_1), (x_2, r_2) \in epi f$ и $\lambda \in [0,1]$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) \notin epi f$$

$(x_1, r_1) \in epi f \Leftrightarrow r_1 \geq f(x_1), x_1 \in X$

$(x_2, r_2) \in epi f \Rightarrow r_2 \geq f(x_2), x_2 \in X$

и X изп. $\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$

$\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2 \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda r_1 + (1-\lambda) r_2) \in epi f \Rightarrow epi f$ е изпъкнало мн-во.

Обратно, нека $epi f$ е изп. в $\mathbb{R}^{n+1}$. Взимаме $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$

~~[illegible]~~ $(x_1, f(x_1)) \in epi f$

$(x_2, f(x_2)) \in epi f$

$epi f$ е изпъкнало $\Rightarrow \lambda(x_1, f(x_1)) + (1-\lambda)(x_2, f(x_2)) \in epi f$

$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in \text{epi} f$

$\Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ и $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$

$\Rightarrow f$ е изпъкнала в X. $\square$

Основни свойства на изп. ф-ции:

<u>Тв.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. Нека $f, g: X \to \mathbb{R}$ са изпъкнали в X. Тогава функциите αf за $\alpha > 0$ и $f+g$ са изпъкнали в X.

<u>Д-во</u> с проверка на деф. $\square$

<u>Тв.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. и $f_\gamma : X \to \mathbb{R}$ са изпъкнали ф-ции $\forall \gamma \in \Gamma$. Тогава

$$f(x) := \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)$$

е изпъкнала в X.

<u>Д-во</u> f_γ са изп. в $X \Rightarrow \text{epi} f_\gamma$ са изп. в $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\underbrace{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \text{epi} f_\gamma}$$ е изпъкнало

$= \{(x, r) : x \in X, f_\gamma(x) \leq r \ \forall \gamma \in \Gamma\} = \{(x,r) : x \in X, r \geq \sup_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\}$ - изп.

$\Rightarrow f$ е изпъкнала в X

<u>Тв.</u> Нека X е изпъкнало и $f: X \to \mathbb{R}$.

f е изп. в $X \Leftrightarrow \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k : \lambda_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, k$ и $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ и $x_1, \dots, x_k \in X$, $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \quad \forall k$

неравенство на Йенсен.

Д-во Нека е в сила Йенсен за $\forall K \geq 2$ точки $\Rightarrow$ е в сила за $K=2$, което е деф. за изпъкнала функция.

Нека f е изпъкнала в $X \Rightarrow \text{epi} f$ е изпъкнало мн-во в $\mathbb{R}^{n+1}$. Взимаме произволни $x_1, \dots, x_K \in X$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_K \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{K} \lambda_i = 1$

$(x_i, f(x_i)) \in \underset{\text{изп. мн-во}}{\text{epi} f}, i=1,\dots,K$

$\Rightarrow$ съдържа в себе си изп. комб. на произволен брой свои точки.

$$\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i (x_i, f(x_i))\right) \in \text{epi} f$$

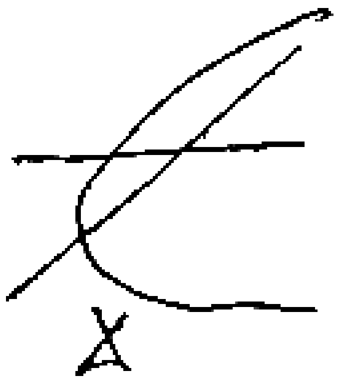
$$\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{K} \lambda_i f(x_i)\right) \in \text{epi} f$$

$$\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i \in X \text{ и } \sum_{i=1}^{K} \lambda_i f(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i\right)$$

$\square$

Тв. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. мн-во и $f: X \to \mathbb{R}$.

f е изп. в-ху $X \Leftrightarrow \forall x \in X$ и $\forall d \in \mathbb{R}^n, d \neq \vec{0}$ такива, че $T_{x,d} := \{t \in \mathbb{R} : x + td \in X\} \wedge X \neq \emptyset$ и



ф-ята $\varphi_{x,d}(t) := f(x+td)$ е изп. в $T_{x,d}$ като ф-ция на 1 променлива.

Д-во Нека f е изп. в X. Взимаме произволно $x \in X$ и $d \in \mathbb{R}^n, d \neq \vec{0}$.

$T := \{t \in \mathbb{R} : x + td \in X\}$ и $\varphi(t) := f(x+td), t \in T$.

Взимаме $t_1, t_2 \in T$ и $\lambda \in [0,1]$

$t_1 \in T \Rightarrow x + t_1 d \in X$

$t_2 \in T \Rightarrow x + t_2 d \in X$

$\lambda(x + t_1 d) + (1-\lambda)(x + t_2 d) \in X$ (изп.)

$\Rightarrow \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \in T$

От изп. на f в $X \Rightarrow f(x+(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)d) = f(\lambda(x+t_1d)+(1-\lambda)(x+t_2d)) \leq$

$\leq \lambda f(x+t_1d) + (1-\lambda)f(x+t_2d)$

$\varphi(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) \leq \lambda\varphi(t_1)+(1-\lambda)\varphi(t_2) \Rightarrow \varphi$ е изп. в T

Обратно, нека $\forall x,d$ $\varphi_{x,d}(t)$ е изп. в $T_{x,d}$.

Фикс. $x, y \in X, y \neq x$.

Разгл. $T := T_{x,y-x} := \{t \in \mathbb{R} : x+t(y-x) \in X\} \underset{X \text{ е изп.}}{\supseteq} [0,1]$

$\varphi(t) := \varphi_{x,y-x}(t) := f(x+t(y-x))$ в T е изп. в T.

Да разгледаме $\lambda y + (1-\lambda)x$, $\lambda \in [0,1]$

$\varphi(\lambda) = f(\lambda y + (1-\lambda)x)$

$\lambda = \lambda.1 + (1-\lambda).0 \in T$

φ е изпъкнала в $T \Rightarrow \varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1)+(1-\lambda)\varphi(0)$

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda)f(x)$$

$\square$

Непрекъснатост на изпъкнали функции:

<u>Тв.1</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. мн-во и $f: X \to \mathbb{R}$ е изп. в X. Нека $x_1, \dots, x_k \in X$ и $P := co(x_1, \dots, x_k)$. Тогава f достига максимума си в-ху P в някоя от точките $x_1, \dots, x_k$.

<u>Д-во</u> $x \in P$, тоест $\exists \lambda_i \geq 0, i=1,\dots,k$ и $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$: $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{f(x_i)}_{\leq \max f(x_i)} \leq \max_{i=1,\dots,k} f(x_i) \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \max_{i=1,\dots,k} f(x_i) \text{ и}$$

f достига този max в т-ка сред $x_1, \dots, x_k$

Тв. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. мн-во и $f: X \to \mathbb{R}$ е изпъкнало в X.
$\forall$ т. $x_0 \in \operatorname{int} X$ $\exists B[x_0,\alpha] \subseteq X$: f е огр. отгоре в-ху $B[x_0,\alpha]$.

Д-во $x_0 \in \operatorname{int} X$, тоест $\exists B(x_0,\beta) \subseteq X$. В него можем да впишем n-мерен куб P с център в т. x_0. От тв.1 $\Rightarrow \exists K: f(x) \le K\ \forall x \in P$.
В P можем да впишем $B[x_0,\alpha] \subseteq P$. $\Rightarrow f$ е огр. от K в $B[x_0,\alpha]$. □

Теорема Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изп. и $f: X \to \mathbb{R}$ е изп. в X.
f е непр. в $\forall$ т. $x_0 \in \operatorname{int} X$.

Д-во

Фикс. $x_0 \in \operatorname{int} X$. Взимаме $B[x_0,\alpha] \subseteq X : f(x) \le K\ \forall x \in B[x_0,\alpha]$, за някоя константа K.

Взимаме $y \in B(x_0,\alpha)$, $y \ne x_0$

$$z = x_0 + \alpha \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$$

$$w = x_0 - \alpha \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$$

Озн. $d := \|y-x_0\| \ne 0$.

$y \in [x_0,z] \Rightarrow \exists \lambda \in [0,1]: y = \lambda x_0 + (1-\lambda) z = \lambda x_0 + (1-\lambda)\left(x_0 + \frac{\alpha}{d}(y-x_0)\right) =$

$$= x_0 + \frac{\alpha(1-\lambda)}{d}(y-x_0)$$

$$\underbrace{(y-x_0)}_{\ne \vec{0}}\left(1 - \frac{\alpha}{d}(1-\lambda)\right) = \vec{0} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha(1-\lambda)}{d} \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{d}{\alpha} = \frac{\alpha - d}{\alpha}.$$

$$1-\lambda = \frac{d}{\alpha}$$

$$y = \frac{\alpha - d}{\alpha} x_0 + \frac{d}{\alpha} z$$

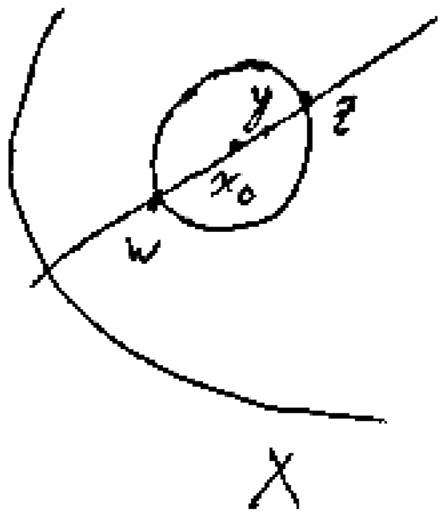
изп. на $f \Rightarrow f(y) \le \frac{\alpha - d}{\alpha} f(x_0) + d \underbrace{f(z)}_{\le K \ (z \in B[x, \alpha])}$

$$\alpha f(y) \le (\alpha - d) f(x_0) + dK$$

$$\alpha (f(y) - f(x_0)) \le d (K - f(x_0))$$

$$f(y) - f(x_0) \le \frac{d}{\alpha} (K - f(x_0))$$

17.09.2018



Д-во (продължение)

Фикс. $x_0 \in \operatorname{int} X$

$B[x_0,\alpha] \subseteq X$ и т.че $f(x) \le K \quad \forall x \in B[x_0,\alpha]$

Произв. $y \in B[x_0,\alpha]$, $y \ne x_0$

$$z = x_0 + \frac{\alpha(y-x_0)}{\|y-x_0\|}, \quad w = x_0 - \frac{\alpha(y-x_0)}{\|y-x_0\|}$$

$d := \|y-x_0\| \ne 0$

1. $y \in [x_0, z] \Rightarrow f(y) - f(x_0) \le \frac{K - f(x_0)}{\alpha} \cdot d$ (1)

2. $x_0 \in [w, y]$

$\exists \mu: x_0 = \mu w + (1-\mu) y = \mu\left(x_0 - \frac{\alpha(y-x_0)}{d}\right) + (1-\mu) y$

$d x_0 = \mu d x_0 - \mu\alpha(y-x_0) + (1-\mu) d y$

$(d - \mu d - \mu\alpha) x_0 = (d - \mu d - \mu\alpha) y$

$(d - \mu d - \mu\alpha)\underbrace{(x_0 - y)}_{\ne \vec{0}} = \vec{0} \Rightarrow (1-\mu) d = \mu\alpha$

$d - \mu d = \mu\alpha \Rightarrow d = \mu(d+\alpha) \Rightarrow \mu = \frac{d}{d+\alpha}$ и $1-\mu = \frac{\alpha}{d+\alpha}$

$x_0 = \frac{d}{d+\alpha} w + \frac{\alpha}{d+\alpha} \cdot y$

От изп. на $f \Rightarrow f(x_0) \le \frac{d}{d+\alpha} \underbrace{f(w)}_{\le K} + \frac{\alpha}{d+\alpha} f(y)$

$(\alpha + d) f(x_0) \le d K + \alpha f(y)$

$(f(x_0) - f(y))\alpha \le d(K - f(x_0))$

$$f(x_0) - f(y) \le \frac{K - f(x_0)}{\alpha} \cdot d \qquad (2)$$

От (1) и (2)

$$\Rightarrow \quad |f(y) - f(x_0)| \le \frac{K - f(x_0)}{\alpha} \cdot d \qquad (3)$$

За всяко $\varepsilon > 0$ избираме $\delta > 0$, така че ако $\|x - y\| < \delta$, то

$\frac{K - f(x_0)}{\alpha} \|x - y\| < \frac{K - f(x_0)}{\alpha} \delta < \varepsilon$ (ако изберем $\delta < \frac{\varepsilon \cdot \alpha}{K - f(x_0)}$)

и тогава фиксираме $\varepsilon > 0$ при y, така че $\|y - x_0\| < \delta$ за $\delta < \frac{\varepsilon \alpha}{K - f(x_0)}$ имаме от (3), че

$|f(y) - f(x_0)| \le \varepsilon$, тоест f е непрекъсната в x_0

От изп. на $f \Rightarrow$

$$f(x_0) \le \frac{d}{\alpha + d} \underbrace{f(w)}_{\le K} + \frac{\alpha}{d + \alpha} f(y)$$

∎

XI. Диференцируемост по посока на изпъкнали функции. Диференцируеми изпъкнали функции.

<u>Опр.</u> Нека $f: X \to \mathbb{R}$. Нека $x_0 \in X$ и d е допустима посока за X в т. x_0 ($\exists t_0 : x_0 + td \in X$).
$t \in [0, t_0], d \neq \vec{0}$

Казваме, че f е <u>диференцируема</u> в. т. x_0 по <u>посока</u> $d \neq \vec{0}$, ако $\exists \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$.

Границата (ако $\exists$) се означава с

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t}$$

и се нарича производна по посока d на ф-ята f в т. x_0.

<u>Опр.</u> f е <u>диференцируема в x_0</u>, ако $\exists \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ такъв, че

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0. \qquad (4)$$

<u>Тв.</u> Нека $f: X \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \operatorname{int} X$. Ако f е диф. в т. x_0, то f е диф. по всяка посока $d \neq \vec{0}$ и

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), d \rangle.$$

__Д-во__ f е диференцируема в x_0, тоест е изпълнено (4).
Нека фиксираме посока $d \neq \vec{0}$. Тъй като $x_0 \in \operatorname{int} X$, точките $x_0 + td \in X$ за достатъчно малки $t > 0$.

За $t > 0$ $\dfrac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = \dfrac{f(x_0+td) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), td \rangle + \langle \nabla f(x_0), td \rangle}{t}$

$$= \underbrace{\frac{f(x_0+td) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), td \rangle}{t}}_{} + \langle \nabla f(x_0), td \rangle$$

$\exists \lim$ от диф. на f в x_0 и $=0$

$$\Rightarrow \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x_0+td) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), td \rangle}{t} + \langle \nabla f(x_0), d \rangle$$

$=0$

$\square$

__Т-ма__ Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество и $f : X \to \mathbb{R}$ е изп. в X ф-ция. f е диф.-ма по $\forall$ посока $d \neq \vec{0}$ във всяка точка $x_0 \in \operatorname{int} X$.

__Д-во__ Фикс. $x_0 \in \operatorname{int} X$ и $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$\{t : x_0 + td \in X\}$ съдържа интервал около 0.

(1) диференчното частно намалява при $t \downarrow 0$
(2) диференчното частно е огр. отдолу за $t > 0$
$\Big\} \Rightarrow \exists \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t}$

За (1) взимаме $0 < t_1 \le t_2$ и достатъчно малки

$t_1 \in [0, t_2]$ $\quad \exists \lambda: \; t_1 = \lambda . 0 + (1-\lambda) t_2$

$$t_1 = t_2 - \lambda t_2$$

$$\lambda t_2 = t_2 - t_1$$

$$\lambda = \frac{t_2 - t_1}{t_2} \Rightarrow 1 - \lambda = \frac{t_1}{t_2}$$

$$t_1 = \frac{(t_2 - t_1)}{t_2} \cdot 0 + \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2$$

Дефинираме $\varphi(t) := f(x_0 + td)$ $\qquad \varphi : T \to \mathbb{R}$

$$\frac{f(x_0 + td) - f(x_0)}{t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}.$$

Т-ъй като f е изпъкнала в $X \Rightarrow \varphi$ е изпъкнала в t.
От изпъкналостта на φ в-ху T имаме

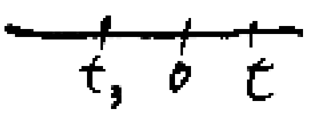
$$\varphi(t_1) \le \frac{t_2 - t_1}{t_2} \varphi(0) + \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) \,\Big|\, t_2$$

$$t_2 \varphi(t_1) \le (t_2 - t_1) \varphi(0) + t_1 \varphi(t_2)$$

$$t_2 (\varphi(t_1) - \varphi(0)) \le t_1 (\varphi(t_2) - \varphi(0)) \,\Big|\, \frac{1}{t_1 t_2}$$

$$\frac{\varphi(t_1) - \varphi(0)}{t_1} \le \frac{\varphi(t_2) - \varphi(0)}{t_2}$$ $\Rightarrow$ диф. частно намалява при $t \downarrow 0$.

За (2) взимаме произволно $t \in T, t > 0$.
$\exists t_1 < 0, t_1 \in T$ (инт. около 0).



$\exists \mu: 0 = \mu . t_3 + (1-\mu) t$

$\mu(t_3 - t) + t = 0$

$\mu = \dfrac{t}{t - t_3}$

$1 - \mu = \dfrac{-t_3}{t - t_3}$

$0 = \dfrac{t}{t-t_3} t_3 - \dfrac{t_3}{t-t_3} . t \Rightarrow \varphi(0) \leq \dfrac{t}{t-t_3} \varphi(t_3) + \dfrac{(-t_3)}{t-t_3} \varphi(t) \ \Big| \ t - t_3$

$(t - t_3)\varphi(0) \leq t\varphi(t_3) - t_3 \varphi(t)$

$t_3(\varphi(t) - \varphi(0)) \leq t(\varphi(t_3) - \varphi(0)) \ \Big| \cdot \dfrac{1}{t . t_3} < 0$

$\forall t > 0, t \in T \qquad \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \geq \dfrac{\varphi(t_3) - \varphi(0)}{t_3}$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{\downarrow 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \inf\limits_{t > 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ $\square$

<u>Зад.</u> От диференцируемост на изп. ф-ция в x_0 по $\forall$ посока $d \in \mathbb{R}^n \not\Rightarrow f$ е диф. в т. x_0

<u>Пр.</u> $f(x) = \|x\|$ е диференцируема по всяка посока в т. $\vec{0}$, но не е диф. в $\vec{0}$

<u>Т-ма</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и отворено множество и $f: X \to \mathbb{R}$. Тогава следните са еквивалентни:

е диф.

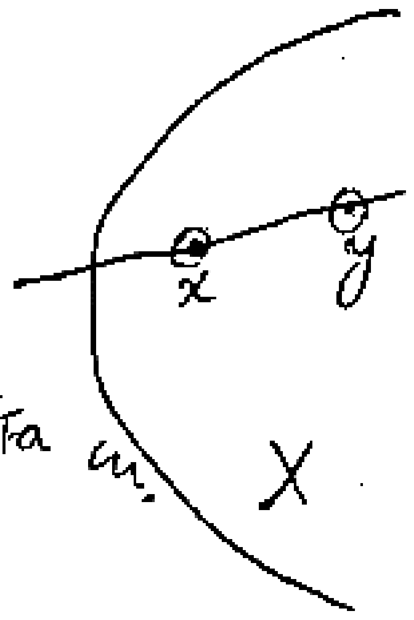
(а) f е изпъкнала в X

(б) $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle, \ \forall x,y \in X$

(в) $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ (монотонност)

<u>Д-во:</u>

(а) $\Rightarrow$ (б) Знаем, че f е изпъкнала в X. Взимаме $x,y \in X$, $x \neq y$.
Нека $d = y - x$. Да ~~ра~~ разгледаме функцията



$\varphi(t) := f(x+td)$

$\varphi : T \to \mathbb{R}$

$T := \{t \in \mathbb{R} : x+td \in X\}$

X е изпъкнало и съдържа $[0,1]$ във вътрешността си.

φ е изп в T (т.к. f е изп. в T).

Диференчното частно намалява при $t \downarrow 0$. За $t<1$ и $t>0$

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \leq \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1} \quad \forall t \in (0,1).$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t} \leq f(y)-f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial d}(x) = \langle \nabla f(x), d \rangle = \langle \nabla f(x), y-x \rangle \leq f(y) - f(x)$$

(б) $\Rightarrow$ (в)

$$f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle$$
$$+ \ f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x-y \rangle$$

$$0 \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y-x \rangle \geq 0$$

(в)⇒(а) Зa да докажем, че f е изпъкнало в X е дост. да докажем, че рестрикцията на f до всяка права $\cap X$ е изпъкнала ф-ция.

Фиксираме $x \in X$ и $d \in \mathbb{R}^n, d \neq \vec{0}$

$T = \{t \in \mathbb{R} : x + td\} \subseteq X$ - отворен интервал около 0

$\varphi : T \to \mathbb{R}$ като $\varphi(t) := f(x+td)$.

Взимаме $t_1, t_2 \in T$, така че $t_1 \leq t_2$.

Тъй като f е диф. в $X \Rightarrow \varphi$ е диф. в T.

$\varphi'(t) = \langle \nabla f(x+td), d \rangle, t \in T$.

$$(t_2 - t_1)(\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1)) = \langle \nabla f(\overset{y}{x + t_2 d}), (t_2 - t_1)d \rangle - \langle \nabla f(\overset{x}{x + t_1 d}), (t_2 - t_1)d \rangle =$$

$$= \langle \nabla f(\underbrace{x + t_2 d}_{y}) - \nabla f(\underbrace{x + t_1 d}_{x}), \underbrace{(t_2 - t_1)d}_{(y-x)} \rangle \geq 0 \text{ от (в)}.$$

$\varphi'(t_2) - \varphi'(t_1) \geq 0 \Rightarrow \varphi'$ е растяща в $T \Rightarrow \varphi$ е изп. в $T \Rightarrow f$ е изп. в X $\square$

08.05.2018

<u>Опр.</u> Казваме, че $f: \overset{\in \mathbb{R}^n}{X} \to \mathbb{R}$ е <u>двукратно диф.</u> в т-ка $x_0 \in \operatorname{int} X$, ако $\exists\, \nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ и $\exists$ симетрична матрица $H(f)(x_0) \in S(n \times n)$, такава че

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{1}{2} \langle H(f)(x_0)(x - x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|^2} = 0$$

<u>Опр.</u> Казваме, че матрицата A е <u>неотрицателно дефинитна</u> (пишем $A \geq 0$), ако $\langle Ad, d \rangle \geq 0 \ \forall d \in \mathbb{R}^n$ и <u>положително дефинитна</u> (пишем $A > 0$), ако $\langle Ad, d \rangle > 0 \ \forall d \in \mathbb{R}^n, d \neq \vec{0}$.

<u>Т-ма</u>

Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и отворено. и нека $f: X \to \mathbb{R}$ е двукратно диференцируема в X. Тогава f е изпъкнала $\iff H(f) \geq 0$.

<u>Д-во.</u> Нека f е изпъкнала в X. Фиксираме произволно $x_0 \in X$. Фик. произволно $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq \vec{0}$.

$x_0 + td \in X$ за достатъчно малко t.

$f(x_0 + td) \geq f(x_0) + t\langle \nabla f(x_0), d \rangle$ поради изпъкналостта на f в X.

$$\frac{f(x_0+td)-f(x_0)-\langle \nabla f(x_0),td\rangle-\frac{1}{2}\langle H(f)(x_0)(td),td\rangle+\frac{1}{2}\langle H(f)(x_0)(td),td\rangle}{t^2\|d\|^2}\geq 0$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(x_0+td)-f(x_0)-\langle \nabla f(x_0),td\rangle-\frac{1}{2}\langle H(f)(x_0)(td),td\rangle}{t^2\|d\|^2}\geq$$

$$\geq -\frac{1}{2}\frac{\langle H(f)(x_0)d,d\rangle}{\|d\|^2}$$

$0\geq -\langle H(f)(x_0)d,d\rangle \sim \langle H(f)(x_0)d,d\rangle\geq 0\ \forall d\in\mathbb{R}^n \Rightarrow$

$H(f)(x_0)\geq 0\ \forall x_0\in X.$

Нека сега $x_0\in X$ и $d\in\mathbb{R}^n, d\neq\vec{0}$.

$\varphi(t):=f(x_0+td)$ за $t\in T:=\{t\in\mathbb{R}: x_0+td\in X\}$

отв. интервал около 0

Достатъчно е да покажем, че φ е изпъкнала в T.

От двукратната диф. на f в $X \Rightarrow \varphi$ е двукратно диф. в T

и $\varphi''(t)=\langle H(f)(x_0+td)d,d\rangle\geq 0$ тъй като за $t\in T$ $x+td\in X$, а там $H(f)$ е неотрицателно дефинирана.

$\varphi''(t)\geq 0\ \forall t\in T \Rightarrow \varphi$ е изпъкнала в $T \Rightarrow f$ е изпъкнала в X $\square$

XII. Субградиенти. Субградиенти на изпъкнали ф-ции.

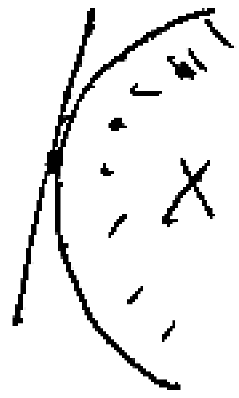
<u>Опр.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Векторът $x^* \in \mathbb{R}^n$ се нарича <u>субградиент</u> на f в $x_0 \in X$ ако $f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in X$.

$$\langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) \geq \langle x^*, x \rangle - f(x) \ \forall x \in X.$$
$$\langle x^*, x_0 \rangle - f(x_0) \geq \langle x^*, x \rangle - r \ \forall x \in X \ \forall r \geq f(x)$$

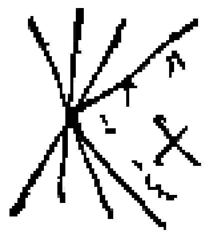
Полагаме $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v := (x^*, -1)$.

$$\langle v, (x_0, f(x_0)) \rangle \geq \langle v, (x, r) \rangle \ \forall (x, r) \in \operatorname{epi} f$$

т.е. v е нормален вектор към опорна за множеството $\operatorname{epi} f$ хиперравнина в т. $(x_0, f(x_0)) \in \operatorname{epi} f$.



<u>Опр.</u> Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Множеството на всички субградиенти на f в т. $x_0 \in X$ се нарича <u>субдиференциал</u> на f в т. x_0 и озн.



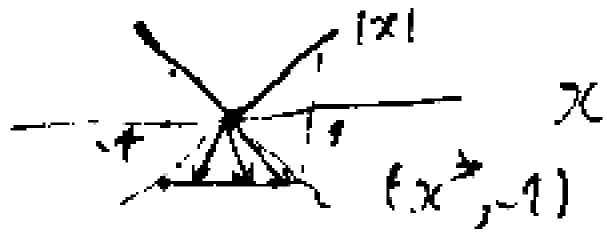
$$\partial f(x_0) := \{x^* \in \mathbb{R}^n : f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle, \forall x \in X\}$$

<u>Пр. 1</u> $f(x) = \|x\|$ и $x_0 = \vec{0}$.

$$\partial f(\vec{0}) = ?$$

$$x^* \in \partial f(x_0) \iff f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$\|x\| - \|\vec{0}\| \geq \langle x^*, x - \vec{0} \rangle \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$1 \geq \langle x^*, \frac{x}{\|x\|} \rangle \ \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq \vec{0}$$
$$1 \geq \sup_{x \in S} \langle x^*, x \rangle \Rightarrow \|x^*\| \leq 1$$

$$\partial f(\vec{0}) = B[0,1]$$



$x^* \in [-1,1]$

Тв. (монотонност на ∂f). Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}^n$

$$\langle x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2 \rangle \geq 0 \ \forall x_1^* \in \partial f(x_1) \text{ и } \forall x_2^* \in \partial f(x_2),\ x_1, x_2 \in X$$

Тв. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$

Ако f е непрекъсната в т. $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\partial f(x_0)$ е изпъкнало и компактно множество.

Д-во Изпъкналостта и затвореността на $\partial f(x_0)$ следват от деф. От непр. на f в т. $x_0 \in \operatorname{int} X$ за $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, така че $B[x_0, \delta] \subseteq X$ и $\varepsilon > f(x) - f(x_0)$ $\forall x \in B[x_0, \delta]$.

Нека $x^* \in \partial f(x_0)$ $(x^* \neq \vec{0})$, $x_0 + \delta \frac{x^*}{\|x^*\|} \in B[x_0, \delta]$

$$\varepsilon > f(\underbrace{x_0 + \frac{\delta x^*}{\|x^*\|}}_{\in X}) - f(x_0) \geq \langle x^*, \frac{\delta x^*}{\|x^*\|} \rangle = \frac{\delta \|x^*\|^2}{\|x^*\|} = \delta \|x^*\| \Rightarrow \|x^*\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$\forall x^* \in \partial f(x_0)$ имаме, че $\|x^*\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}$, т.е. $\partial f(x_0)$ е огр.

$\square$

Тв. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и $f: X \to \mathbb{R}$. Ако $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ за $\forall x \in X$, то f е изпъкнала в X.

Д-во Нека $x_1, x_2 \in X$ и $\lambda \in [0,1]$

$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in X$

Нека $x^* \in \partial f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \neq \emptyset$ (по предположение)

$$f(x_1) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \langle x^*, (1-\lambda)(x_1 - x_2) \rangle \quad \cdot | \lambda$$
$$f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \langle x^*, \lambda (x_2 - x_1) \rangle \quad | (1-\lambda) \cdot \quad \oplus$$

$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq 0 \Rightarrow f$ е изпъкнала функция

$\square$

Тв. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f: X \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в X. За $\forall x_0 \in \operatorname{int} X$ е изпълнено $\forall d \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}\ \exists y^* \in \partial f(x_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \langle y^*, d\rangle = \max_{x \in \partial f(x_0)} \langle x^*, d\rangle.$$

(в частност $\partial f(x_0) \neq \emptyset$).

Д-во Фиксираме $x_0 \in X$ и $d \neq \vec{0}$, $d \in \mathbb{R}^n$. $\exists \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \inf_{t>0} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t}$

За $\forall x^* \in \partial f(x_0)$ и за достатъчно малки $t>0$ $x_0+td \in X$

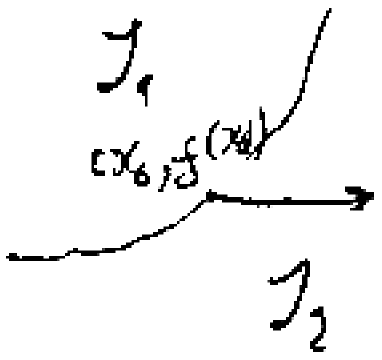
$$\frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} \ge \frac{\langle x^*, td\rangle}{t} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \inf_{t>0} \frac{f(x_0+td)-f(x_0)}{t} \ge \langle x^*, d\rangle \ \forall x^* \in \partial f(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \ge \max_{x^* \in \partial f(x_0)} \langle x^*, d\rangle$$

Съществува ли $y^* \in \partial f(x_0)$: $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) = \langle y^*, d\rangle$? Ще построим такова y^* чрез т-мата за отделимост.

$Y_1 = \{(x, r) : x \in X, r > f(x)\}$

$Y_2 = \{(x_0+td, f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)), t \ge 0\}$



са изп. в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Наистина, ако допуснем, че $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, то $\exists x_0 : (x_0+td, f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0))$ за $t \ge 0$ т.че

$$f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) > f(x_0+td)$$

или $\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) > \frac{f(x_0+td) - f(x_0)}{t} \geq \frac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ - противоречие.

Значи $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$.

От т-мата за отделимост на изпъкнали множества $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$: $v = (x^*, r^*)$ такъв, че $\langle (x^*, r^*), (x, r) \rangle \geq \langle (x^*, r^*), (x_0 + td, f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0)) \rangle$ $\forall x \in X, r > f(x), t \geq 0$

$$\langle x^*, x \rangle + r^* r \geq \langle x^*, x_0 + td \rangle + r^* f(x_0) + r^* t \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \qquad (\#)$$

Предполагаме, че $r^* = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle \geq \langle x^*, x_0 + td \rangle\ \forall x \in X\ \forall t \geq 0$.
$x = x_0 + td - tx^*$ за достатъчно малки $t \in X$

~~xxxxxxxx~~ $\langle x^*, x_0 + td - tx^* \rangle \geq \langle x^*, x_0 + td \rangle$

$\Rightarrow \langle x^*, -tx^* \rangle \geq 0 \Rightarrow \|x^*\| \leq 0 \Rightarrow x^* = \vec{0} \Rightarrow v = (x^*, r^*) = (\vec{0}, 0)$ противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow r^* \neq 0$.

Ако $r^* < 0$, то за достатъчно големи $r > 0$ $(\#)$ се нарушава $\Rightarrow$
$\Rightarrow r^* > 0$. Делим $(\#)$ на r^*

$$\left\langle \frac{x^*}{r^*}, x \right\rangle + r \geq \left\langle \frac{x^*}{r^*}, x_0 + td \right\rangle + f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \quad \forall x \in X; r > f(x), t \geq 0 \qquad (\#\#)$$

Фиксираме $x \in X$ и $t \geq 0$ и пускаме $r \to f(x)$ в $(\#\#)$.

$$\left\langle \frac{x^*}{r^*}, x \right\rangle + f(x) \geq \left\langle \frac{x^*}{r^*}, x_0 + td \right\rangle + f(x_0) + t\frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \quad \forall x \in X,\ t \geq 0 \qquad (\#,\#,\#)$$

За $t = 0$

$$\left\langle \frac{x^*}{r^*}, x \right\rangle + f(x) \geq \left\langle \frac{x^*}{r^*}, x_0 \right\rangle + f(x_0) \quad \forall x \in X.$$

Полагаме $y^* = -\frac{x^*}{r^*} \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle y^*, x - x_0 \rangle \; \forall x \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow y^* \in \partial f(x_0)$

В (###) взимаме $x = x_0$

$\langle -y^*, x_0 \rangle + f(x_0) \geq \langle -y^*, x_0 + td \rangle + f(x_0) + t \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \; \forall t \geq 0$

$t \langle y^*, d \rangle \geq t \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \quad \forall t \geq 0$

За $t > 0$ $\langle y^*, d \rangle \geq \frac{\partial f}{\partial d}(x_0) \Rightarrow \langle y^*, d \rangle = \frac{\partial f}{\partial d}(x_0)$ $\square$

15.05.2018

<u>Тв.</u> Нека $f: X \to \mathbb{R}$ и нека f е изпъкнала в изпъкналото множество $X \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow x_0 \in \operatorname{int} X$. Тогава $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$

<u>Д-во</u>

От изп. на f и д-мост в $x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \; \forall x \in X$

По деф. $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$. Да допуснем, че $\exists x^* \in \mathbb{R}^n : x^* \in \partial f(x_0)$ и $x^* \neq \nabla f(x_0)$

$\alpha = x^* - \nabla f(x_0), \alpha \neq \vec{0}$

$x^* \in \partial f(x_0) \Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq \langle x^*, x - x_0 \rangle \; \forall x \in X$

$x_0 \in \operatorname{int} X \Rightarrow$ за дост. малко $t > 0$ $x_0 + t\alpha \in X$

$$f(x_0 + t\alpha) - f(x_0) \geq \langle x^*, t\alpha \rangle$$

$$\frac{f(x_0 + t\alpha) - f(x_0)}{t} \geq \langle x^*, \alpha \rangle$$

При $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha) - f(x_0)}{t} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \alpha} = \langle \nabla f(x_0), \alpha \rangle \Rightarrow \langle \nabla f(x_0) - x^*, \alpha \rangle \geq 0$$

$\Rightarrow \langle \nabla f(x_0) - x^*, x^* - \nabla f(x_0) \rangle \geq 0 \Rightarrow -\| \nabla f(x_0) - x^* \|^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \| \nabla f(x_0) - x^* \| = 0 \Rightarrow x^* = \nabla f(x_0)$ - противоречие

$\square$

XIII. Екстремални свойства на изпъкнали ф-ции

Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е диференцируема. Необходимо услови[е] f да има min в т. $\bar{x}$ е $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$. Ако освен това f е изпъкнала функция, то $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$ е достатъчно условие f да има минимум в $\bar{x}$.

Ако f е диф. и изп., $\bar{x}$ е т. на min $\Leftrightarrow \nabla f(x) = \vec{0}$

Т-ма 1 Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е изпъкнала функция. Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало множество. Разглеждаме задачата

$$(P)\left|\begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in X \end{array}\right.$$

НДУ $\bar{x} \in X$ да бъде решение на (P) е да $\exists x^* \in \partial f(\bar{x})$ такова, че $\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \ \forall x \in X$.

Д-во Нека $\exists x^* \in \partial f(\bar{x})$, така че

$$\langle x^*, x - \bar{x} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X \qquad (*)$$

От деф. за субдиференциал имаме

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \langle x^*, x - \bar{x} \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Комбинираме с $(*)$ и получаваме

$$f(x) - f(\bar{x}) \geq \overbrace{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}^{\geq 0} \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ тоест } f(x) \geq f(\bar{x}) \ \forall x \in X$$

$\Rightarrow \bar{x}$ е решение на (P)

Обратно, нека $\bar{x}$ е решение на (P). Разглеждаме в $\mathbb{R}^{n+1}$

$\mathcal{Y}_1 := \{(x-\bar{x}, r) : x \in \mathbb{R}^n, r \geq f(x) - f(\bar{x})\}$

$\mathcal{Y}_2 := \{(x-\bar{x}, r) : x \in \mathbb{R}^n, r < 0\}$

$\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ са изпъкнали и $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2 = \emptyset$. Допускаме противното, т.е. $\exists$ точка $(x-\bar{x}, r) \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$; $x \in X$ и $0 > r \geq f(x) - f(\bar{x})$, тоест $f(\bar{x}) > f(x)$. Това е в противоречие с предположението, че $\bar{x}$ е решение на (P).

От т-мата за отделимост на изп. мн-ва $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}$, за който е изпълнено

$$\left.\begin{array}{l} a = (\underset{\in \mathbb{R}^n}{v}, \underset{\in \mathbb{R}}{\mu}) \\ \beta \in \mathbb{R} \end{array}\right\} H := \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle a, y \rangle = \beta\} \text{ разделя } \mathcal{Y}_1 \text{ и } \mathcal{Y}_2, \text{ т.е.}$$

$$\langle a, y_1 \rangle \leq \beta \ \forall y_1 \in \mathcal{Y}_1$$
$$\langle a, y_2 \rangle \geq \beta \ \forall y_2 \in \mathcal{Y}_2,$$

$$\left| \begin{array}{ll} \langle v, x-\bar{x} \rangle + \mu r \leq \beta \ \forall x \in \mathbb{R}^n, r \geq f(x) - f(\bar{x}) & (1) \\ \langle v, x-\bar{x} \rangle + \mu r \geq \beta \ \forall x \in X, r < 0 & (2) \end{array}\right.$$

В (1) и (2) при $x = \bar{x}$ получаваме $\mu r \leq \beta$ за $r \geq 0$ и
$\mu r \geq \beta$ за $r < 0$

$\Rightarrow$ за $r = 0$ $\beta \geq 0$ и за $r \uparrow 0$ $\beta \leq \underbrace{\mu r}_{\to 0} \Rightarrow \beta = 0$ и следователно

$$\left| \begin{array}{ll} \langle v, x-\bar{x} \rangle + \mu r \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n, r \geq f(x) - f(\bar{x}) & (1') \\ \langle v, x-\bar{x} \rangle + \mu r \geq 0 \ \forall x \in X, r < 0 & (2') \end{array}\right.$$

От (1') при $x = \bar{x} \Rightarrow \mu r \leq 0 \ \forall r \geq 0 \Rightarrow \mu \leq 0$. Допускаме, че $\mu = 0$ $\Rightarrow$ от (1') $\langle v, x-\bar{x} \rangle \leq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \vec{0}$. Тогава $a = (v, \mu) = \vec{0}$, което противоречи на избора на $a \Rightarrow \mu < 0$.

Делим (1') и (2') на $-\mu$ и полагаме $x^* := \frac{-\nu}{\mu} \in \mathbb{R}^n$.

Получаваме

$$\begin{cases} \langle x^*, x-\bar{x} \rangle \le r \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall r \ge f(x) - f(\bar{x}) & (1'') \\ \langle x^*, x-\bar{x} \rangle \ge r \quad \forall x \in X,\ r<0 & (2'') \end{cases}$$

От (1'') за фиксирано $x \in \mathbb{R}^n$ взимаме $r = f(x) - f(\bar{x})$

$\Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \ge \langle x^*, x-\bar{x} \rangle \ \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^* \in \partial f(\bar{x})$

За фикс. $x \in X$ в (2'') правим граничен преход $r \uparrow 0$

$\Rightarrow \langle x^*, x-\bar{x} \rangle \ge 0 \ \forall x \in X \Rightarrow x^* \in \partial f(\bar{x})$ удовлетворява (*). $\square$

<u>Сл. 1</u> Нека при предположенията на т-ма 1 имаме още, че f е диференцируема в $\bar{x}$. Тогава $\bar{x}$ е реш. на (P) $\Leftrightarrow \langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \ge 0 \ \forall x \in X$

<u>Д-во</u> От т-ма 1 $\bar{x}$ е решение на (P) $\Leftrightarrow \exists x^* \in \partial f(\bar{x})$: $\langle x^*, x-\bar{x} \rangle \ge 0 \ \forall x \in X$. Но тъй като f е диференцируема в $\bar{x}$, то $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$ и $\Rightarrow \langle \nabla f(\bar{x}), x-\bar{x} \rangle \ge 0 \ \forall x \in X$, понеже $\nabla f(\bar{x})$ е единствен елемент на $\partial f(\bar{x})$ $\square$

<u>Сл. 2</u> При предположенията на т-ма 1 нека имаме, че X е отворено множество. Тогава $\bar{x}$ е решение на (P) $\Leftrightarrow \vec{0} \in \partial f(\bar{x})$

<u>Д-во</u> Нека $\vec{0} \in \partial f(\bar{x}) \Rightarrow f(x) - f(\bar{x}) \ge \langle \vec{0}, x-\bar{x} \rangle = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow f(x) \ge f(\bar{x}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{x}$ е решение на (P).

Обратно, ако $\bar{x}$ е решение на (P), от т-ма 1 $\Rightarrow \exists x^* \in \partial f(\bar{x})$: $\langle x^*, x-\bar{x} \rangle \ge 0 \ \forall x \in X$

Но x е отв. и $\bar{x} \in X$ с ~~някакво~~ някакво кълбо, т.е. $\exists \delta > 0 : B[\bar{x}, \delta] \subseteq X$. За $\forall d \neq \vec{0}, d \in \mathbb{R}^n \ \exists t : \bar{x} + td \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle x^*, \bar{x} + td - \bar{x} \rangle \geq 0$ и за $t > 0$ $\langle x^*, d \rangle \geq 0 \ \forall d \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$
$\Rightarrow x^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in \partial f(\bar{x})$.

□

<u>Сл.3</u> Нека при предположенията на т-ма 1 имаме, че X е отв. и f е диф. в $\bar{x}$. Тогава $\bar{x}$ е решение на (P) $\Leftrightarrow \nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$.

<u>Д-во</u> От сл.2 имаме, че $\vec{0} \in \partial f(\bar{x})$ и тъй като f е диф. в $\bar{x}$, то $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\} \Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$.

□

XIV Теорема на Кун и Такър при афинни ограничения

$$(P)\begin{cases}\min f(x)\\ \langle a_i, x\rangle \le b_i,\ i=1,\dots,m\end{cases}$$

$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ a_i \in \mathbb{R}^n,\ b_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,m$

От тема 3: НУ за реш $\bar{x}$ на (P) при предположение за диф. на f в $\bar{x}$:

$$НУ: \begin{cases}\text{Ако } \bar{x} \text{ е решение на } (P) \Rightarrow\\ \exists \bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_i \ge 0 : \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i a_i = \vec{0} \quad (\#)\\ \bar{\lambda}_i(\langle a_i, \bar{x}\rangle - b_i) = 0,\ i=1,\dots,m\end{cases}$$

От тема 7: ф-лата на Лагранж за (P):

$$\mathcal{L}(x,\vec{\lambda}) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, x\rangle - b_i),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+$$

Щом е диф. в т $\bar{x}$, то

$\mathcal{L}(\cdot,\vec{\lambda})$ е диф. в $\bar{x}$ и

$$\mathcal{L}'_x(\bar{x},\vec{\lambda}) = \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i a_i \overset{(\#)}{=} \vec{0},$$

т.е. $\bar{x}$ е стационарна точка за ф-цията на Лагранж.

При предположение за изпъкналост на f в $\mathbb{R}^n$

Тогава $\mathcal{L}(\cdot,\vec{\lambda})$ е изпъкнала в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{L}(\bar{x},\vec{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\vec{\lambda})\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

За $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$
$$\mathcal{L}(\bar{x},\vec{\lambda}) = f(\bar{x}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \underset{\ge 0}{\lambda_i}(\underset{\le 0}{\langle a_i,\bar{x}\rangle - b_i})}_{\le 0} \le \mathcal{L}(\bar{x},\vec{\lambda})$$

$$\mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(\bar{x},\vec{\bar{\lambda}}) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m} \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x},\vec{\lambda}) \le (\bar{x},\vec{\bar{\lambda}}) \le \mathcal{L}(x,\vec{\lambda}) \ \forall x \in \mathbb{R}^{n} \ \forall \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m},$$

т.е. $(\bar{x},\bar{\lambda})$ е седловидна точка за $\mathcal{L}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{+m}$, а това е ДУ $\bar{x}$ да бъде решение на (P), тоест при направеното предположение за диф. НУ става НДУ.

<u>Т-ма</u> (Кун и Такър)

Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е изп. в $\mathbb{R}^n$. Ако $\bar{x}$ е решение на (P), то $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m}$: $(\bar{x},\bar{\lambda})$ е седлова точка за $\mathcal{L}$ за (P), т.е.

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}.$$

22.05.2018

$$(P)\quad \begin{array}{l} \min f(x) \\ \langle a_i, x\rangle \le b_i,\ i=1,\dots,m \end{array}$$

<u>Т-ма</u> Нека $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е изпъкнала. Ако $\bar{x}$ е решение на (P), то $\exists\, \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m}$: $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ е седлова точка за $\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(\langle a_i, x\rangle - b_i)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{+m}$, т.е. $\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda})$ $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$

<u>Д-во</u> $(\Leftarrow)$ е доказано в тема 7

$(\Rightarrow)$ $\bar{x}$ е решение на (P)

1) $I := \{ i \in \{1,\dots,m\} : \langle a_i, \bar{x}\rangle = b_i \} = \emptyset$

$\langle a_i, \bar{x}\rangle < b_i,\ i=1,\dots,m$

$\exists\, \delta > 0$: $B[\bar{x}, \delta]$ ще бъде от доп. точки за (P)

$\bar{x}$ е т. лок. min за $f(x)$, т.е. $f(\bar{x}) \le f(x)$ $\forall x \in B[\bar{x}, \delta]$.

Но f е изп. $\Rightarrow$ $\bar{x}$ е и глобален минимум, т.е. $f(\bar{x}) \le f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

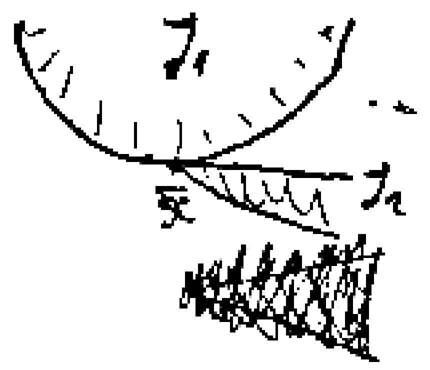
Полагаме $\bar{\lambda}_i = 0,\ i=1,\dots,m \Rightarrow \bar{\lambda} = \vec{0} \in \mathbb{R}^{+m}$ и

$\mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}),\ \mathcal{L}(x,\bar{\lambda}) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \underset{\ge 0}{\lambda_i} \underbrace{(\langle a_i, \bar{x}\rangle - b_i)}_{\le 0} \le f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda})\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x},\lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda})$ $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$

2) $I \ne \emptyset$



$Y_1 := \{ (y, r) : y \in \mathbb{R}^n, r > f(y) \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

$Y_2 := \{ (x, f(\bar{x})) : x,\ \langle a_i, x - \bar{x}\rangle \le 0,\ i \in I \}$

Y_1 и Y_2 са изпъкнали, непразни и $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$. Множества, Допускаме, че $(x, r) \in \mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_2$

$\Rightarrow \overbrace{r = f(\bar{x}) > f(x)}^{(*)}$ и $\langle a_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0,\ i \in I$

$x_t = \bar{x} + t(x - \bar{x}),\ t \geq 0$

$i \in I,\ \langle a_i, x_t \rangle = \langle a_i, \bar{x} + t(x - \bar{x}) \rangle = \underbrace{\langle a_i, \bar{x} \rangle}_{= b_i} + \overset{\geq 0}{t} \underbrace{\langle a_i, x - \bar{x} \rangle}_{\leq 0} \leq b_i$

$i \notin I$

$\Rightarrow \langle a_i, x_t \rangle = \langle a_i, \bar{x} \rangle + t \langle a_i, x - \bar{x} \rangle \leq b_i$ за достатъчно малки t

$\Rightarrow$ За достатъчно малки $t > 0$ x_t са допустими точки в (P)

$\underset{f(\bar{x}) \leq}{f}(x_t) = f(tx + (1-t)\bar{x}) \leq t f(x) + (1-t) f(\bar{x})$ за дост. малки $t \in (0, 1]$

$\Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(x)$, което противоречи на допускането $(*)$

От т-мата за изпъкнали непресичащи се множества $\exists\ (\underset{\in \mathbb{R}}{\overset{\in \mathbb{R}^n}{\nu}}, \mu)$:

$\langle (\nu, \mu), (y, r) \rangle \leq \langle (\nu, \mu), (x, f(\bar{x})) \rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n\ \forall r > f(y)$

$\forall x: \langle a_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0,\ i \in I$

$\langle \nu, y \rangle + \mu r \geq \langle \nu, x \rangle + \mu f(\bar{x})$

За $\underset{x = \bar{x}}{y = x = \bar{x}}$ получаваме $\mu r \geq \mu f(\bar{x})\ \forall r > f(\bar{x}) \Rightarrow \mu \geq 0$. Допускаме, че $\mu = 0 \Rightarrow \langle \nu, y \rangle \geq \langle \nu, \bar{x} \rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle \nu, y - \bar{x} \rangle \geq 0\ \forall y \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \nu = \vec{0} \Rightarrow (\nu, \mu) = \vec{0}$. Но това не е така $\Rightarrow$ $\mu > 0$.

Делим $(*)$ на $\mu > 0$ и полагаме $x^* = -\frac{\nu}{\mu}$

$\langle -x^*, y \rangle + r \geq \langle -x^*, x \rangle + f(\bar{x})\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ r > f(y),\ x: \langle a_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0,\ i \in I$.

При $r \downarrow f(y)$ $\langle -x^*, y \rangle + f(y) \geq \langle -x^*, x \rangle + f(\bar{x})$ $(**)$

$\Rightarrow f(y) - f(\bar{x}) \geq \langle x^*, y - \bar{x} \rangle\ \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow x^* \in \partial f(\bar{x})$

От $(**)$ за $y=\bar{x}$ получаваме $\langle -x^*, x-\bar{x}\rangle \le 0 \ \forall x: \langle a_i, x-\bar{x}\rangle \le 0, i\in I$

$\Rightarrow$ неравенството $\langle -x^*, x-\bar{x}\rangle$ е следствие от системата $\langle a_i, x-\bar{x}\rangle \le 0$ $_{i\in I}$

$\Rightarrow$ от $\Lambda\Phi \Rightarrow \exists \bar{\lambda}_i \ge 0, i\in I: -x^* = \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i a_i$. Заместваме x^* в $(**)$ за $x=\bar{x}$

$f(y) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i \langle a_i, y\rangle \ge f(\bar{x}) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i \langle a_i, \bar{x}\rangle \ \forall y \in \mathbb{R}^n$. Полагаме $\bar{\lambda}_i = 0$ за $i \notin I$

и получаваме $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)^T \in \mathbb{R}^{+m}$

$$f(y) + \sum_{i\in I} \bar{\lambda}_i (\langle a_i, y\rangle - b_i) \ge f(\bar{x}) \ \forall y \in \mathbb{R}^n$$

$$f(\bar{x}) \le f(x) + \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i (\langle a_i, y\rangle - b_i) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ - сменяме } y \text{ с } x$$

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Взимаме $\lambda \ge \vec{0}$ и образуваме $\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overbrace{\lambda_i}^{\ge 0} \underbrace{(\langle a_i, \bar{x}\rangle - b_i)}_{\le 0}$

$\le f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \ \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$ $\square$

XV. Теорема на Кун-Таккър. Общ случай.

$$(Q)\quad \begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) \le 0,\ i=1,\dots,m \\ &x \in X \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) : X \times \mathbb{R}^{+m} \to \mathbb{R}$$

Казваме, че за (Q) е в сила условието на Слейтър, ако $\exists x_0 \in X : g_i(x_0) < 0,\ i=1,\dots,m$

Т-ма Нека $X \subseteq \mathbb{R}^n$ е изпъкнало и нека $f, g_i : X \to \mathbb{R}$ са изпъкнали в X, $i=1,\dots,m$. Нека за (Q) е изпълнено условието на Слейтър. Ако $\bar{x}$ е решение на (Q), то $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m}_0 : (\bar{x},\bar{\lambda})$ е седлова точка за $\mathcal{L}(x,\lambda)$ в $X \times \mathbb{R}^{+m}$, тоест

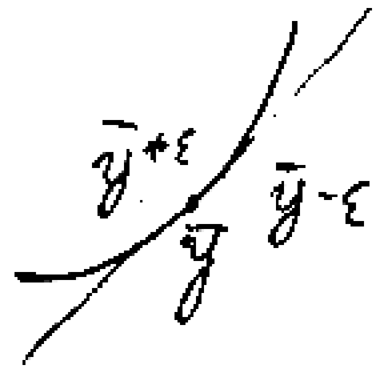
$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda}) \quad \forall x \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$$

Д-во В $\mathbb{R}^{m+1}$ дефинираме

$$Y := \{(y_0, y_1, \dots, y_m) : \exists x \in X \mid y_0 \ge f(x),\ y_i \ge g_i(x),\ i=1,\dots,m\}$$

Y е изпъкнало, непразно и $\bar{y}$ с координати $(f(\bar{x}), \vec{0})$ е контурна точка на Y, понеже $(f(\bar{x})+\varepsilon, \vec{0}) \in Y$ и $(f(\bar{x})-\varepsilon, \vec{0}) \notin Y$ за дост. малки $\varepsilon > 0$.

$\bar{y}$ е контурна за $Y \Rightarrow \exists$ опорна за Y в т. $\bar{x}$ хиперравнина, т.е. $\exists v \in \mathbb{R}^{m+1}$, $v \ne \vec{0}$:



$$\langle v, y\rangle \ge \langle v, \bar{y}\rangle \quad \forall y \in Y$$

$$\langle v, y\rangle \ge v_0 f(\bar{x}) \quad \forall y \in Y \qquad (*)$$

Тъй като координатите на точките са неограничени отгоре, то $v_i \ge 0, i=0,\dots,m$. Допускаме, че $v_0=0$. Разглеждаме $x_0 \in X$, която удовл. усл. на Слейтър. Разглеждаме т. $(f(x_0), g_1(x_0), \dots, g_m(x_0)) \in \mathcal{Y}$.

Ако $v_0=0$, то

$$v_0 f(x_0) + \sum v_i g_i(x_0) \ge 0$$

За $x = x_0 \in X$ $\quad \sum v_i \underbrace{g_i(x)}_{<0} \ge 0 \Rightarrow v = \vec{0} \Rightarrow$ противоречие с $v \ne \vec{0}$

Значи $v_0 > 0$. Делим (*) на $v_0 > 0$ и полагаме $\bar{\lambda}_i = \frac{v_i}{v_0}, i=1,\dots,m$

За $x \in X$, за $(f(x), g_1(x), \dots, g_m(x))^T \in \mathcal{Y}$ и от (*) за нея имаме

$$\underbrace{f(x) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(x)}_{\mathcal{L}(x,\bar{\lambda})} \ge f(\bar{x}) \quad \forall x \in X \qquad (\#)$$

От (#) за $x = \bar{x} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) \ge 0$

От друга страна $g_i(\bar{x}) \le 0$ $\bar{\lambda}_i \ge 0 \ \forall i=1,\dots,m$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = f(\bar{x})$ и (#)

$$\mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda}) \quad \forall x \in X$$

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overset{\ge 0}{\lambda_i} \underbrace{g_i(\bar{x})}_{\le 0} \le f(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m} \qquad (\#\#)$$

От (#) и (##) имаме

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda) \le \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda}) \le \mathcal{L}(x,\bar{\lambda}) \quad \forall x \in X \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}$$

□

Пр. 1 Нека не е изпълнено усл. на Слейтър, по-конкретно

$\min f(x) = x$ $\quad X = \mathbb{R}$

$g(x) = x^2 \leq 0$

Реш. е 0.

За (Q) не е в сила усл. на Слейтър. Ако допуснем, че заключението на ~~те~~теоремата е изпълнено, то

$\exists \bar{\lambda} \geq \vec{0} : (\bar{x}, \bar{\lambda}) = (\vec{0}, \vec{\lambda})$ ще бъде седловина за $\mathcal{L}(x, \lambda) = x + \lambda x^2$ в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, т.е.

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda) \leq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}) \; \forall x \in \overset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{X}} \; \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$0 \quad \leq \quad 0 \quad \leq x + \bar{\lambda} x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$$ и имаме квадратен тричлен с $\bar{\lambda} \geq 0$ пред втората степен, който приема ≥ 0 в-ту $\mathbb{R} \iff D < 0$.

Но $D = 1$. Противоречие $\Rightarrow$ не е в сила ~~усл~~ и заключението на теоремата.

29.05.2018

Кун-Такър

- за афинни ограничения: (P) $\min f(x)$

$\langle a_i, x\rangle \leq b_i, i=1,..,m$

$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (\langle a_i, x\rangle - b_i)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

- общ случай: (Q) $\min f(x)$

$g_i(x) \leq 0, i=1,..,m$

$x \in X$

$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ в $X \times \mathbb{R}^m$

Разглеждаме задачата

$$(Q')\left|\begin{array}{l} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0,\ i=1,..,m \\ \langle a_j, x\rangle \leq b_j,\ j=1,..,n \end{array}\right.$$

$$\hat{\mathcal{L}}(x,\lambda,\mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k} \mu_j (\langle a_j, x\rangle - b_j) \text{ в } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{+m} \times \mathbb{R}^{+k}$$

<u>Т-ма</u> (Кун-Такър) Нека за (Q') имаме, че $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i=1,..,m$ са изпъкнали. Нека $X := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_j, x\rangle \leq b_j, j=1,..,k\}$. Нека за (Q') е в сила условието на Слейтър, т.е. $\exists x_0 \in X : g_i(x_0) < 0, i=1,..,m$. Ако $\bar{x}$ е оптимално решение на (Q'), то $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+_m, \bar{\mu} \in \mathbb{R}^+_k$: $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ е седловидна за $\hat{\mathcal{L}}$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{+m} \times \mathbb{R}^{+k}$: $\hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\lambda,\mu) \leq \hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \leq \hat{\mathcal{L}}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu})$

<u>Д-во</u> Задачата (Q') е еквивалентна на задачата

$$(Q)\left|\begin{array}{l}\min f(x)\\ g_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,m\\ x\in X\end{array}\right.$$

$X := \{x\in\mathbb{R}^n : \langle a_j,x\rangle \le b_j,\ j=1,\dots,k\}$

Тъй като $\bar{x}$ е решение на (Q), то от т-мата на Кун-Такър (общ случай) $\Rightarrow \exists\bar{\lambda}$: $(\bar{x},\bar{\lambda})$ е седлова точка за $L(x,\lambda)$ за (Q) в $X\times\mathbb{R}^{+m}$, т.е.

$$L(\bar{x},\lambda)\le L(\bar{x},\bar{\lambda})\le L(x,\bar{\lambda})\ \forall x\in X\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{+m}.$$

Това означава, че $\bar{x}$ е оптимално решение на

$$(P)\left|\begin{array}{l}\min L(x,\bar{\lambda})\\ \langle a_j,x\rangle\le b_j,\ j=1,\dots,k\end{array}\right.$$

f - изп., g_i - изп., $i=1,\dots,m$

$\Rightarrow L(\cdot,\bar{\lambda})$ е изп. функция.

От т-мата на КТ с афинни ограничения $\Rightarrow$ т.к. $\bar{x}$ е решение на (P) $\exists\bar{\mu}\in\mathbb{R}^{+k}$: $(\bar{x},\bar{\mu})$ е седлова точка за функцията на Лагранж за (P),

$$L_P(x,\mu) = L(x,\bar{\lambda}) + \sum_{j=1}^{k}\mu_j(\langle a_j,x\rangle - b_j) \text{ в } \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{+k}, \text{ т.е.}$$

$$L_P(\bar{x},\mu)\le L_P(\bar{x},\bar{\mu})\le L_P(x,\bar{\mu})\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall\mu\in\mathbb{R}^{+k}\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall\mu\in\mathbb{R}^{+k}$$

$$\hat{L}(\bar{x},\lambda,\mu) = L(\bar{x},\lambda) + \mu\sum_{j=1}^{m}(\langle a_j,\bar{x}\rangle - b_j) \overset{(*)}{\le} L(\bar{x},\bar{\lambda}) + \mu\sum_{j=1}^{m}(\langle a_j,\bar{x}\rangle - b_j) = \hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\mu)$$

$$\Rightarrow \hat{L}(\bar{x},\lambda,\mu)\le\hat{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})\le\hat{L}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu})\ \forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{+m}\ \forall\mu\in\mathbb{R}^{+k}.\ \square$$

Разглеждаме задачата (Q'')

$$(Q'')\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x)\le 0, i=1,\dots,m \\ \langle a_j,x\rangle \le b_j, j=1,\dots,k \\ \langle c_l,x\rangle = d_l, l=1,\dots,s \end{cases}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}(x,\lambda,\mu,\nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\langle a_j,x\rangle - b_j) + \sum_{l=1}^{s}\nu_l(\langle c_l,x\rangle - d_l) \text{ в }$$

$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{+m}\times\mathbb{R}^{+k}\times\mathbb{R}^s$

<u>Т-ма</u> Нека $f, g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ са изпъкнали, $i=1,\dots,m$. Означаваме с $X := \{x\in\mathbb{R}^n : \langle a_j,x\rangle\le b_j, j=1,\dots,k, \langle c_l,x\rangle = d_l, l=1,\dots,s\}$.

Нека за (Q'') е в сила условието на Слейтър, т.е. $\exists x_0\in X: g_i(x_0)<0$ за $i=1,\dots,m$, които не са афинни неравенства.

Ако $\bar x$ е решение на (Q''), то $\exists \bar\lambda,\bar\mu,\bar\nu$ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{+m}\times\mathbb{R}^{+k}\times\mathbb{R}^s$ такива, че

$$\tilde{\mathcal{L}}(\bar x,\lambda,\mu,\nu)\le \tilde{\mathcal{L}}(\bar x,\bar\lambda,\bar\mu,\bar\nu)\le\tilde{\mathcal{L}}(x,\bar\lambda,\bar\mu,\bar\nu)$$

$\forall x\in\mathbb{R}^n\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{+m}\ \forall\mu\in\mathbb{R}^{+k}\ \forall\nu\in\mathbb{R}^s$

<u>Д-во</u> $(Q'')\sim(Q')\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x)\le 0, i=1,\dots,k \\ \langle a_j,x\rangle\le b_j, j=1,\dots,k \\ \langle c_l,x\rangle\le d_l, l=1,\dots,s \\ \langle -c_l,x\rangle\le -d_l, l=1,\dots,s \end{cases}$

$\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x)\le 0, i=1,\dots,m \\ x\in X \end{cases}$

$f, g_i: X\to\mathbb{R}$ са изпъкнали в X - изпъкнало.
допустима

Ако $\forall i\ \exists x_i\in X$: $g_i(x_i)<0$, то $x_0 = \sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{m}\in X$

и $g_k(x_0) = g_k\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{m}\right) \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} g_k(x_i) < 0$

↓
Йенсен

и x_0 е точка на Слейтър

От предното твърдение, тъй като $\bar x$ е решение на (Q'), то

$\exists\bar\lambda\in\mathbb{R}^{+m}, \bar\mu\in\mathbb{R}^{+k}_{*}, \bar\nu'\in\mathbb{R}^{+s}, \nu''\in\mathbb{R}^{+s}$:

$$\hat{\mathcal{L}}(x,\lambda,\mu,\nu',\nu'') = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{k}\mu_j(\langle a_j,x\rangle - b_j) + \sum_{l=1}^{s}\nu'_l(\langle c_l,x\rangle - d_l) + \sum_{l=1}^{s}\nu'_l(\langle -c_l,x\rangle - d_l)$$

има седл. точка $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}',\bar{\nu}'')$ в $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{+m}\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{+s}\times\mathbb{R}^{+s}$

$$\tilde{\mathcal{L}}(x,\lambda,\mu,\lambda)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\sum_{j=1}^{k}\mu_j(\langle a_j,x\rangle-b_j)+\sum_{\ell=1}^{s}\nu_\ell(\langle c_\ell,x\rangle-d_\ell)$$

$$\hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\lambda,\mu,\nu',\nu'')\le\hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}',\bar{\nu}'')\le\hat{\mathcal{L}}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}',\bar{\nu}'')\ \forall$$
$x\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{R}^{+m},\ \mu\in\mathbb{R}^k,\ \nu'\in\mathbb{R}^{+s},\ \nu''\in\mathbb{R}^{+s}$.

Полагаме $\bar{\nu}=\bar{\nu}'-\bar{\nu}''\in\mathbb{R}^s$. Взимаме $\lambda\in\mathbb{R}^m_+,\ \mu\in\mathbb{R}^k_+,\ \nu\in\mathbb{R}^s$. Ако $\nu_i\ge0\Rightarrow\nu_i'=\nu_i,\ \nu_i''=0$, а ако $\nu_i<0$, то $\nu_i'=0,\ \nu_i''=-\nu_i$.

$$\tilde{\mathcal{L}}(\bar{x},\lambda,\mu,\nu)=\hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\lambda,\mu,\nu',\nu'')\overset{(\#)}{\le}\hat{\mathcal{L}}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})\le\hat{\mathcal{L}}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}',\bar{\nu}'')=$$
$$=\tilde{\mathcal{L}}(\bar{x},\lambda,\mu,\nu)\le\tilde{\mathcal{L}}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})\le\tilde{\mathcal{L}}(x,\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}^{+m}_*,\ \forall\mu\in\mathbb{R}^k,\ \forall\nu\in\mathbb{R}^s\ \square$$

XVI. Т-ма на Кун и Такър. Диференциална форма.

$$(P)\begin{cases} \min f(x) \\ g_i(x) \le 0,\ i=1,\dots,m \\ \langle a_l, x\rangle = 0,\ l=1,\dots,k \\ x_j \ge 0,\ j\in J \subseteq \{1,\dots,n\} \end{cases}$$

<u>Т-ма</u> (Кун-Такър, диференциална форма) Нека $X := \{x\in\mathbb{R}^n : x_j \ge 0, j\in J\}$. Нека f и $g_i : X \to \mathbb{R}$ са изпъкнали в X. Нека за (P) е в сила условието на Слейтър, т.е. $\exists$ допустима за (P) точка $x_0 : g_i(x_0) < 0$, $i=1,\dots,m$.
Нека f и g_i, $i=1,\dots,m$ са диференцируеми в т. $\bar{x}$. $\bar{x}$ е решение на (P) $\Leftrightarrow \exists\, \bar{\lambda}\in\mathbb{R}^{+m}, \bar{\nu}\in\mathbb{R}^k : (\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})$ е решение на системата

$$\left(\mathcal{L}(x,\lambda,\nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{l=1}^{k} \nu_l(\langle a_l, x\rangle - d_l) \text{ в } X\times\mathbb{R}^m_+\times\mathbb{R}^k \right)$$

$$\begin{cases}
1)\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) \ge 0,\ j\in J \\
2)\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0,\ j\notin J \\
3)\ \bar{x}_j \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0,\ j=1,\dots,n \\
4)\ \bar{x}_j \ge 0,\ j\in J \\
5)\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) \le 0,\ i=1,\dots,m \\
6)\ \bar{\lambda}_i \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0,\ i=1,\dots,m \\
7)\ \bar{\lambda}_i \ge 0,\ i=1,\dots,m \\
8)\ \dfrac{\partial L}{\partial \nu_l}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0,\ l=1,\dots,k
\end{cases}$$

Д-во (Необходимост) $\bar{x}$ е решение на (P). От ~~...~~ т-ма на Кун и Такър, той като $\bar{x}$ е решение на (P), $\exists \bar{\lambda} \in \mathbb{R}^{+m}, \bar{\nu} \in \mathbb{R}^k$:

общия случай

$$\mathcal{L}(\bar{x},\lambda,\nu) \overset{(\#\#)}{\le} \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) \overset{(\#)}{\le} \mathcal{L}(x,\bar{\lambda},\bar{\nu}) \; \forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}^{+m}, \forall \nu \in \mathbb{R}^k.$$

От това, че $\bar{x}$ е допустима точка, имаме (4), (5) и (8).

$j \in J$ за $t \ge 0$ ~~...~~ $\bar{x} + te_j \in X$. От $(\#) \Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x}+te_j,\bar{\lambda},\bar{\nu}) \ge \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = \langle \mathcal{L}'_x(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}), e_j \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\bar{x}+te_j,\bar{\lambda},\bar{\nu}) - \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})}{t} \ge$$

$\ge$ ~~...~~ $\mathcal{L}(\bar{x}+te_j,\bar{\lambda},\bar{\nu}) \ge \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})$ и (1).

$j \notin J$ за $t \ge 0$ $\bar{x}+te_j, x-te_j \in X \overset{\text{от } (\#)}{\Rightarrow} \mathcal{L}(\bar{x} \pm te_j,\bar{\lambda},\bar{\nu}) \ge \mathcal{L}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) &= \langle \mathcal{L}'_x(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}), e_j \rangle \ge 0 \\ -\frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) &= \langle \mathcal{L}'_x(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}), -e_j \rangle \ge 0 \end{aligned}\right\} \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0 \quad \text{и е в сила (2)}$$

~~...~~ $j = 1, \dots, n$. Ако $\bar{x}_j = 0 \Rightarrow (3)$. Нека $\bar{x}_j \ne 0$.

<u>1 случай</u>: $j \in J \Rightarrow \bar{x}_j > 0 \Rightarrow$ за дост. малки $t > 0$ $\bar{x} \pm te_j \in X$. Аналогично с док. за (2) имаме $\frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0 \Rightarrow (3)$.

<u>2 случай</u>: $j \notin J$ за $t \ge 0$

$x \pm te_j \in X$ и, както в док. за (2) $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0 \Rightarrow (3)$

$\mathcal{L}(\bar{x},\cdot,\bar{\nu})$ има макс. по λ в $\bar{\lambda}$ от $(\#\#) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) \le 0, i = 1, \dots, m$ и (5)

За $i \in \{1, \dots, m\}$, ако $\bar{\lambda}_i = 0 \Rightarrow (6)$, а ако $\bar{\lambda}_i > 0 \Rightarrow \bar{\lambda} \pm te_i \ge 0$ за дост. малки t и тогава $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu}) = 0 \Rightarrow (6)$.

(Достатъчност) Нека $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\nu})$ е решение на (1)-(8)

Достатъчно е да покажем, че $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})$ е седлова точка за $\mathcal{L}$ в $X \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^k$ и оттам $\bar{x}$ е решение на (P).

$x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+m}$, $\nu \in \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \geq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) + \left\langle \mathcal{L}'(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}), x - \bar{x} \right\rangle \geq \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) + \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \underbrace{- \sum_{j=1}^{n} \bar{x}_j \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})}_{0 \text{ от } (3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} j \in J,\ x_j \geq 0,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \geq 0 \text{ от } (1) \\ j \notin J,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) = 0 \text{ от } (2) \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial L}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \geq 0$$

$\mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\nu})\ \forall x \in X$

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \nu) = \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) + \langle \mathcal{L}'_\lambda(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}), \lambda - \bar{\lambda} \rangle + \langle \mathcal{L}'_\nu(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}), \nu - \bar{\nu} \rangle =$$

$$= \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) + \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})}_{\leq 0} \overset{\geq 0}{\lambda_i} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \bar{\lambda}_i}_{= 0 \text{ от } (6)} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \nu_\ell}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\nu})(\nu_\ell - \bar{\nu}_\ell)}_{= 0 \text{ от } (8)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\bar{x}, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(x, \bar{\lambda}, \bar{\nu}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m_+,\ \forall \nu \in \mathbb{R}^k$$

$\square$

05.06.2018 **XVII. Задача за безусловна минимизация. Общ минимизиращ алгоритъм.**

$$(P)\ \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

1) Намираме начално приближено решение

2) за $k = 0, 1, 2, \ldots$

(а) ако x_k е оптимално решение - край

(б) ако x_k не е оптимално решение, намираме ново приближено решение

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k.$$

Като определяме $p_k \in \mathbb{R}^n$ (посока на търсене) и $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$ - стъпката по избраната посока на търсене. Използваме методи за линейно търсене.

<u>Пр. 1</u> $\min_{\mathbb{R}} f(x) = e^x + x^2$

$f'(x) = e^x + 2x = 0$ - няма лесен начин да се реши това уравнение.

$\min_{p \in \mathbb{R}^n} f(x_k + p)$ се оказва еквивалентна на оригиналната задача.

Искаме p_k да бъде посока на спускане на f в x_k, т.е.

$f(x_k + t p_k) < f(x_k)$ за $0 < t < \varepsilon$ за някое $\varepsilon > 0$.

След фиксиране на p_k определяме α_k: $\min_{\alpha \geq 0} (x_k + \alpha p_k)$, т.е. $\min f$ по лъча $\{x_k + \alpha p_k, \alpha \geq 0\}$ т.е. решаваме едномерна минимизационна задача и за α_k се взима приближение на едномерна задача.

Въпроси:

1) Какво е сходимост на редицата от решения

2) Каква е редицата от приближени решения близки до решението

При сходимост имаме, че $\{x_k\} \to x^*$. Образуваме редица от грешките $e_k = x_k - x^*$ при $\|e_k\| \to 0$.

Казваме, че тя има скорост на сходимост r, ако

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r} = C, \text{ където } C<\infty$$

При $r=1$ сходимостта се нарича линейна. Нека

$\|e_{k+1}\| = C\|e_k\|^r$ и нека $r=1$.

- при $C<1$ редицата от грешките е сходяща
- при $C\geq 1$ редицата е разходяща

<u>Пр. 2</u> $C=10^{-1}$

$e_k = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$

$C=0{,}99$

$e_k = 1, 0{,}99, 0{,}99^2, \dots$

с точност до 10^{-7} за 1500 итерации

Когато $r=1$ и $C=0$, то сходимостта се нарича суперлинейна.

$r>1$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|} = \lim_{k} \underbrace{\frac{\|e_{k+1}\|}{\|e_k\|^r}}_{C<\infty} \cdot \frac{\|e_k\|^r}{\|e_k\|} = 0$$

При $r=2$ сходимостта се нарича квадратична

Нека $r=2$ и

$$\|e_{k+1}\| = C\|e_k\|^2$$

Нека $C=1$, $\|e_{k+1}\| = \|e_k\|^2$. Достигаме 10^{-7} за 3 итерации

XVIII. Метод на Нютон

$$(P)\ \left|\ \begin{array}{l} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array}\right.$$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е двукратно диф.

Н.У. $\nabla f(x) = 0$

$\nabla f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Втората производна ни трябва, за да приближим първата линейно.

$$\nabla f(x+p) \approx \nabla f(x) + Hf(x)p$$

Ако $\det Hf \neq 0 \Rightarrow p = -Hf(x)^{-1} \nabla f$

x_k е приближеното решение на k-тата стъпка

p_k = нютонова посока

$x_{k+1} = x_k + p_k$

Методът на Нютон има следните недостатъци:

(а) Не се знае дали е сходящ

(б) нютоновите посоки посоки на спускане ли са?

(в) стойността $\alpha_k = 1$ най-добрата възможна ли е?

$$q(p) := f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), p \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x_k)p, p \rangle$$

$f(x_k + p) \approx q(p)$

Т-ма Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ е двукратно диф и H_f е липшиц.

$(\|H_f(x) - H_f(y)\| \leq L\|x-y\| \ \forall x, y)$

Разглеждаме редицата $x_{k+1} = x_k + p_k'$, за която предполагаме, че $x_k \to x^*$, $x_k \neq x^* \ \forall k$.

Ако $H_f(x^*)$ е положително дефинитна матрица, то $\nabla f(x^*) = 0$ и редицата клони към границата суперлинейно $\Leftrightarrow \lim\limits_{k \to p} \frac{\|p_k' - p_k\|}{\|p_k'\|} = 0$, където p_k на Нютонови посоки и новото приближение е $x_{k+1} = x_k + p_k$.

XIX. Модификации на метода на Нютон

1) Гарантиране на спускане - мод. на Холески
2) Гарантиране на сходимостта - методи за мин. търсене

1)
Ако $\langle \nabla f(x), p \rangle < 0 \Rightarrow f(x+tp) < f(x)$, $0 < t \leq \varepsilon$

$$0 > \langle \nabla f(x_k), p_k \rangle \overset{\text{н.н.}}{=} \langle \nabla f(x_k), -H_f(x_k)\nabla f(x_k) \rangle = -\langle \nabla f(x_k), H_f(x_k)\nabla f(x_k) \rangle$$

Ако H_f е пол. дефинитна матрица, то нютоновата посока ще бъде посока на спускане.

Ако $A > 0$ и реш. $Ap = -\nabla f(x_k)$, то p_k' е посока на спускане в x_k, т.к. $\langle \nabla f(x_k), p_k' \rangle = \langle -Ap_k', p_k' \rangle < 0$.

$$\underbrace{H_f(x_k)}_{LDL^T} p = -\nabla f(x_k)$$

$D = (d_{ij})$

Ако $d_{ii} > 0$ го запазваме

Ако $d_{ii} \leq 0$ го заменяме с $|d_{ii}|$ или с достатъчно голямо пол. число.

2) Щом вече имаме посока на спускане, решаваме

$\min\limits_{\alpha \geq 0} f(x_k + \alpha p_k')$ и взимаме приближено решение α_k.

Ъгловия б-ху посоките на спускане:

(a) Дост. спускане

$$\langle -\nabla f(x_k), p_k \rangle > 0$$

Искаме

$$\frac{\langle -\nabla f(x_k), p_k' \rangle}{\|\nabla f(x_k)\| \|p_k'\|} > \varepsilon$$

(б) съизмеримост на посоката с градиента

$\|p_k'\| \geq m \|\nabla f(x_k)\|$

за фикс. m.

Условия в-ху α_k:

(а) да осигуряват дост. намаляване на f

$f(x_k + t p_k') < f(x_k) \quad 0 < t < \varepsilon$

$f(x_k + \alpha_k p_k') \le f(x_k) + \mu \alpha_k \langle \nabla f(x_k), p_k' \rangle$ където $\mu \in (0,1)$. (*)

пази стъпката от това да стане голяма.

(б) Да не е прекалено малка

α_k се взима като първия член на редицата $\frac{1}{2^k}$, който удовл. условието за дост. намаляване.

Т-ма Нека $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Нека x_0 е начално приближение. Дефинираме $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k'$.

Предполагаме, че множеството

$S: \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le f(x_0)\}$ е ограничено и $\nabla f(x)$ е липшицова. Предполагаме, че p_k' удовл. условието за дост. и за $\exists$ на граница, а α_k е първият член на $\frac{1}{2^k}$, удовл. (*). при фикс. $\mu \in (0,1)$. Тогава $\|\nabla f(x_k)\| \to 0$.